

## Repetibilidad y reproducibilidad con el método ANOVA aplicado a la ingeniería: caso de estudio

Dr. Jesús Vicente González Sosa<sup>1</sup>, Mtra. Amanda Lolita Pineda Norman<sup>2</sup>, Dr. José Ángel Hernández Rodríguez<sup>3</sup>, Mtra. Martha Hanel González<sup>4</sup>

**Resumen:** El estudio de la ingeniería se encuentra enfatizado en la mejora continua, por ello se considera a este proceso de calidad, R&R (repetibilidad y reproducibilidad) para la comprensión de las temáticas de la ingeniería, dadas las características que esta herramienta muestra, se utiliza en una aplicación desarrollada por medio de un proceso control numérico para un gage de brocas. En este caso de estudio se recaban datos en conjunto con características del proceso de manufactura, contemplando al operador como una parte esencial del trabajo, con lo cual se obtienen elementos que se plasman en un reporte ANOVA (análisis de la varianza), en donde se estudian diversos aspectos cualitativos enfocándolos a cuestiones cuantitativas. Parte de los resultados muestran que los operadores tanto de los equipos como aquellos que realizan las actividades de metrología tienen relación en común de acuerdo con las etapas que se describen en el proceso para el análisis del caso de estudio. Con el método R&R se logra puntualizar una temática específica que se utiliza en diferentes áreas con la tendencia a generar líneas de desarrollo aplicando este método como parte esencial de la ingeniería

**Palabras clave:** Calidad, optimización, medición, mejora, proceso.

### Introducción

La repetibilidad se expresa como un elemento cuantitativo que se enfoca en la dispersión de resultados aunados a los casos de estudio, por otro lado, la reproducibilidad es representado en diversos ambientes como la proximidad de concordancia que muestran los resultados de mediciones sucesivas, considerando mediciones cambiantes de acuerdo con los operadores de los equipos con los que se realiza la actividad correspondiente (Llamasa, 2007). En este trabajo se hace uso de la metrología como un proceso de medición controlado por dos elementos, instrumento y operador, lo cual conlleva una confiabilidad al momento de realizar las mediciones destacando en ese sentido la repetibilidad y reproducibilidad (R&R) que involucran en todo momento incertidumbres y calibraciones de los equipos requeridos para realizar la operación correspondiente de medición (Calicchio, 2013). Por lo que, es necesario hacer hincapié en que las mediciones son consideradas como parámetros de control en este tipo de actividades para mantener un estándar en el desarrollo de las mediciones.

Un aspecto importante del método R&R es propiamente que se está utilizando como un proceso de enseñanza-aprendizaje para incentivar a las comunidades universitarias en el sentido de hacer uso de herramientas didácticas que generalmente se utilizaban solo como procesos de validación en productos terminados dentro de problemas industriales y en laboratorios institucionales. Esto representa una tarea interesante, dado que conforme mayor sea la correlación entre repeticiones en las medidas, menor serán los errores presentes en el proceso para el caso de estudio, sin embargo, habrá que considerar los factores externos a los cuales se somete el instrumento de medición como al operador de dicho elemento, entre los cuales impactan la temperatura, humedad y estandarización del instrumento (Duarte, 2017).

De acuerdo con las características del caso de estudio, se establece que la mejor forma para determinar la variabilidad de un proceso de medición con estas características, instrumentos y cantidad de operadores, el método que cumple con los requisitos para la aplicación es el estudio de R&R a través de un análisis de varianza (ANOVA) (Botero, 2007).

La repetibilidad se conoce como la varianza que se presenta en un mismo instrumento utilizado por una persona al realizar mediciones de manera repetitiva, indicando con ello la variación de las lecturas individuales que se llevan a cabo con un instrumento y el mismo operador para la acción de medición.

---

<sup>1</sup> El Dr. Jesús Vicente González Sosa es Profesor Investigador del Departamento de Sistemas de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, Ciudad de México, México. [jvgs@azc.uam.mx](mailto:jvgs@azc.uam.mx) (autor correspondiente)

<sup>2</sup> La Mtra. Amanda Lolita Pineda Norman es Profesora del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. [amanda.normas@gmail.com](mailto:amanda.normas@gmail.com)

<sup>3</sup> El Dr. José Ángel Hernández Rodríguez es Profesor Investigador del Departamento de Sistemas de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, Ciudad de México, México. [hrja@azc.uam.mx](mailto:hrja@azc.uam.mx)

<sup>4</sup> La Mtra. Martha Hanel González es Profesora Investigador del Departamento de Sistemas de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, Ciudad de México, México. [mhanel@azc.uam.mx](mailto:mhanel@azc.uam.mx)

Reproducibilidad se conoce como la variación que se logra observar en los promedios que se generan en la cantidad de operadores que realizan mediciones, en otras palabras, se refiere a la cantidad de lecturas sobre el mismo elemento utilizando el mismo instrumento en todas las ocasiones, durante el proceso.

Otro parámetro importante para considerar que hace posible el ANOVA es la varianza que habla de los datos recabados al momento de realizar la medición, tomado en cuenta como un estimador en la dispersión entre la calidad media y el promedio correspondiente.

### Métodología

El método que aporta esta publicación para el desarrollo del caso de estudio se observa en la Figura 1. En la Figura 1 se mencionan cada uno de los pasos a seguir para el desarrollo del caso de estudio y la aplicación de R&R con el método ANOVA.



**Figura 1.** Método de repetibilidad y reproducibilidad en el caso de estudio.

Es importante resaltar que es un proceso constante y cíclico que permite mejorar las tendencias de análisis para casos de estudio en donde exista rotación continua de operadores para la realización de experimentos o pruebas de evaluación.

Además, en este método se puede hacer uso de otras herramientas tecnológicas como el uso de software especializado, bases de datos y análisis en tiempo real, para lograr reducir los tiempos de ejecución.

### Desarrollo

#### *Caso de estudio*

Considerando los pasos establecidos en el método para el caso de estudio, se tienen en primer lugar “selección del producto, proceso o sistema”: para el caso en cuestión se considera como producto un gage de brocas elaborado mediante Router CNC en material MDF (Tablero de fibra de densidad media), para lo cual solo se toma el producto final sin contemplar el procesamiento mediante CNC ya que ese será otro análisis a realizar para determinar la operatividad de un CNC con métodos de calidad.

En la Figura 2 se observa el producto seleccionado para el trabajo a desarrollar en el análisis correspondiente.



**Figura 2.** Gage de brocas en MDF: caso de studio

En la Figura 2 se logra identificar el producto seleccionado para el análisis e interpretación por medio de ANOVA en el producto, el cual cuenta con una serie de barrenos con medidas específicas que van de  $7/64$  a  $17/32$  de pulgada.

El segundo paso es seleccionar instrumentos de medición y llevar a cabo las mediciones: para esta sección se utilizan calibradores vernier, analógico y digital, para identificar las varianzas existentes en conjunto con los operadores, que realizan las mediciones a los especímenes.

En la Figura 3 se tienen la imagen de los calibradores y las mediciones consideradas para el desarrollo del trabajo.



**Figura 3.** Instrumentos de medición y medidas a realizar en R&R.

En la figura 3 se tienen los dos instrumentos de medición considerados, calibrador vernier, y las medidas del gage en MDF para las mediciones, localizadas por medio de los polígonos de color azul, la longitud L1, longitud L2 y el espesor de la pieza. Se han tomado para la muestra de mediciones especímenes con las mismas características de maquinado.

Para el paso tres, “cantidad de operadores,” se han seleccionado seis operadores de entre 22 y 27 años, clasificados en tres de sexo masculino y tres de sexo femenino para realizar las mediciones correspondientes a cada espécimen.

Posteriormente con respecto al paso cuatro, “bases de datos”, después de haber realizado las mediciones, se obtuvieron los siguientes datos, representados en la tabla 1.

**Tabla 1.** Datos de mediciones a los especímenes con calibrador analógico.

Operador	Barreno 1 [mm]	Barreno 2 [mm]	Barreno 3 [mm]	Longitud 1 [mm]	Longitud 2 [mm]	Espesor [mm]
M1	1.372	1.072	0.400	11.662	5.508	0.300
M2	1.362	1.040	0.400	11.640	5.486	0.300
M3	1.340	1.048	0.370	11.665	5.490	0.330
F1	1.358	1.058	0.389	11.668	5.476	0.349
F2	1.369	1.130	0.387	11.669	5.475	0.309
F3	1.401	1.070	0.329	11.672	5.478	0.315

De la tabla 1 como en la tabla 2, M1, M2 y M3 corresponde a los operadores de sexo masculino que realizaron las mediciones correspondientes a los especímenes seleccionados para el desarrollo del artículo, mientras que F1, F2 y F3 hace referencia a los operadores de sexo femenino al momento de realizar las mediciones.

Por otro lado, en la tabla 1 se observa que el sexo masculino tiene una consistencia en las mediciones realizadas con respecto al sexo femenino y ello se hace de forma constante en cada una de las mediciones con el calibrador vernier analógico.

**Tabla 2.** Datos de las mediciones en los especímenes, con calibrador digital.

Operador	Barreno 1 [mm]	Barreno 2 [mm]	Barreno 3 [mm]	Longitud 1 [mm]	Longitud 2 [mm]	Espesor [mm]
M1	1.352	1.042	0.376	11.658	5.454	0.280
M2	1.340	1.032	0.376	11.662	5.474	0.290
M3	1.318	1.040	0.362	11.686	5.480	0.304
F1	1.318	1.022	0.350	11.682	5.482	0.314
F2	1.332	1.038	0.372	11.666	5.464	0.288
F3	1.324	1.036	0.368	11.680	5.476	0.306

En la tabla 2, el valor del espesor en todas las mediciones para los operadores tiene dispersiones bastante visibles, lo cual lleva a una inconsistencia con las mediciones realizadas con el calibrador digital, que se atribuyen a la sensibilidad del instrumento al momento de aplicar el ensayo de metrología.

Las ecuaciones utilizadas se mencionan a de acuerdo con el uso durante el desarrollo del artículo.

*Rango para el equipo:*

$$R = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n} \quad (1)$$

*Promedio de rango:*

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (2)$$

n: es el número de mediciones por operador

*Rango promedio de todos los rangos:*

$$\bar{\bar{R}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{R}_i \quad (3)$$

m: es el número de operadores y  $\bar{R}_i$  es el rango promedio de operador

*Porcentaje de repetibilidad:*

$$\% \text{ Repetibilidad} = \frac{K_1 \bar{x} \bar{R}}{T} \times 100 \% \quad (4)$$

$K_1$  contante que depende del número de mediciones por operador dando un intervalo de confianza del 99%.

$\bar{R}$  es el promedio de los rangos

T tolerancia de la característica medida

*Promedio de cada operador:*

$$\bar{x}_i = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

n es el número de ensayos por operador, r es el número de partes y  $x_i$  es una medida de operador.

*Diferencia de promedios:*

$$\bar{x}_D = x_{imax} - x_{imin} \quad (6)$$

*Porcentaje de reproducibilidad:*

$$\% \text{ Reproducibilidad} = \frac{\sqrt{(K_2 \cdot \bar{x}_D)^2 - \frac{(K_1 \bar{R})^2}{nr}}}{T} \times 100\% \quad (7)$$

*Porcentaje de relación con la repetibilidad y reproducibilidad:*

$$\% R \& R = \sqrt{(\% \text{Repetibilidad})^2 + (\% \text{Reproducibilidad})^2} \quad (8)$$

Interpretación:

- Si  $\%R \& R < 10\%$  el sistema de medición es aceptable.
- Si  $10\% \leq \%R \& R < 30\%$  el sistema de medición puede ser aceptable según la aplicación, costo del instrumento de medición y costo de reparación.
- Si el  $\%R \& R > 30\%$  el sistema de medición es considerado como no aceptable y por lo tanto se requiere de mejorar en el proceso completo.

En los siguientes párrafos se describen los resultados de las pruebas o ensayos realizados a los especímenes del caso de estudio, gage, para identificar las posibles alternativas de estudio en un futuro y mantener latente el método de repetibilidad y reproducibilidad en procesos industriales.

### Pruebas y resultados

Después de aplicar las ecuaciones y el análisis de medición por medio de ANOVA, se representa en la tabla 3, como parte de los resultados extraídos de las pruebas realizadas a cada espécimen en cuestión, en sinergia con los operadores correspondientes para el desarrollo de las mediciones y la recopilación de datos para identificar de forma clara los resultados, que se muestran en la tabla 3.

**Tabla 3.** Análisis ANOVA

Fuente	Desv.Est. (DE)	Var. estudio (6 × DE)	% Var. estudio (%VE)	%Tolerancia (VE/Toler)
Gage R&R total	0.03083	0.1850	0.69	2.31
Repetibilidad	0.02688	0.1613	0.60	2.02
Reproducibilidad	0.01508	0.0905	0.34	1.13
Operador	0.00114	0.0069	0.03	0.09
Operador*Parte	0.01504	0.0902	0.34	1.13
Parte a parte	4.48854	26.9313	100.00	336.64
Variación total	4.48865	26.9319	100.00	336.65

La tabla 3 ofrece información relevante mostrando porcentajes y varianzas de las partes medidas, análisis de los operadores que realizaron las mediciones, tanto del sexo femenino como masculino para identificar las situaciones que generar incertidumbres en cada uno de los análisis de medición, ofreciendo especificaciones cualitativas y cuantitativas para el proceso de calidad a interpretar por medio de un reporte ANOVA.

Los resultados muestran que tanto los procesos de repetibilidad como de reproducibilidad están dentro de los rangos aceptables, observándolo partir de la desviación estándar.

Por otro lado, los valores de la desviación estándar para los operadores igualmente están dentro de los rangos que permiten establecer que la aplicación de las mediciones está de acuerdo con los procesos de medición.

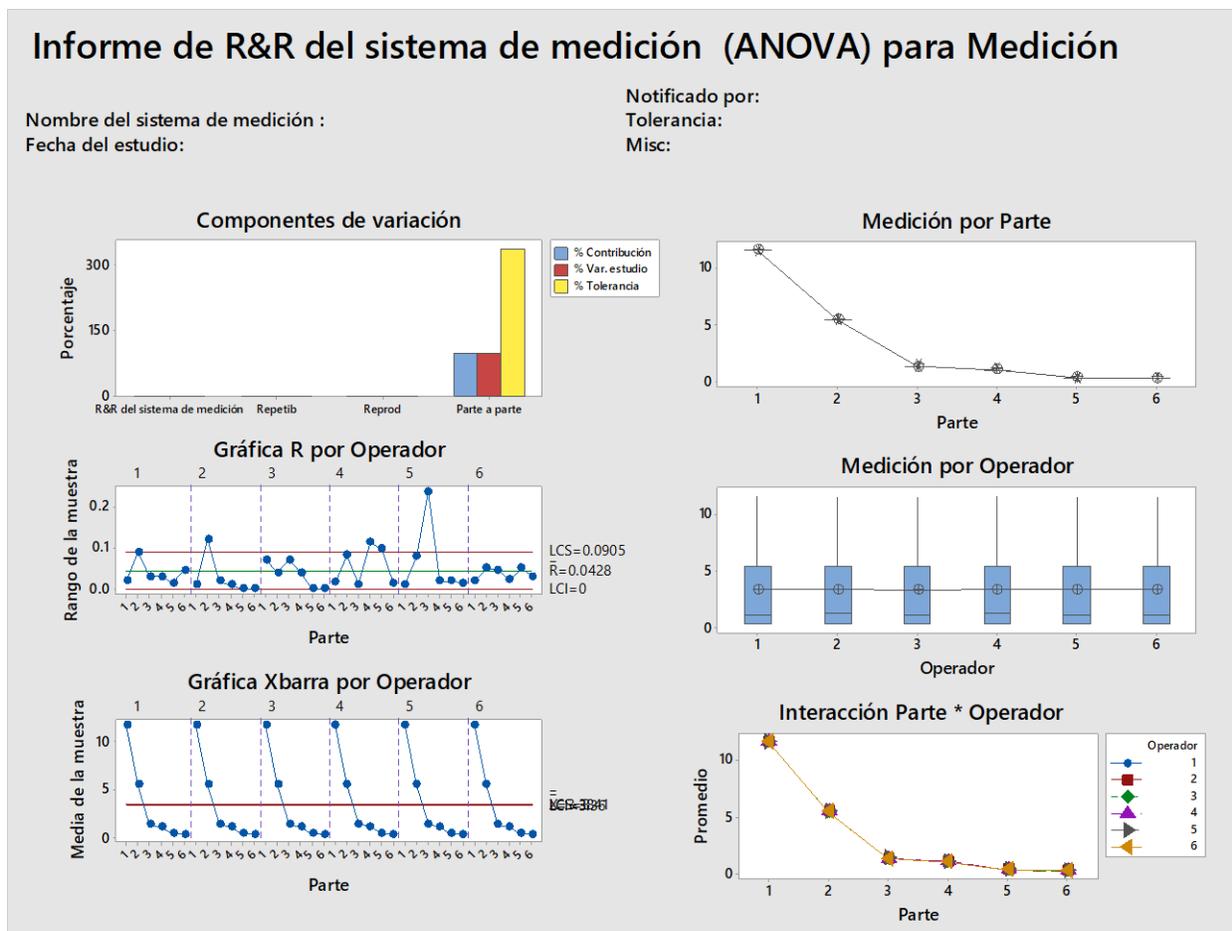
Es necesario realizar un reporte ANOVA, como se especificó anteriormente para ofrecer las tendencias del análisis, estructurando ello a partir de lo que se observa al aplicar dicho método, como herramienta auxiliar del análisis correspondiente.

El reporte ofrece los siguientes resultados:

- Componentes de variación
- Gráfico de R por operador
- Gráfica X barra por operador
- Mediciones por parte
- Medición por operador
- Interacción parte\*operador

Estos elementos se aplican en el caso de estudio, dadas las condiciones de analizar por medio de los procesos de calidad un producto para su validación y los parámetros mencionados son elementos cuantitativos que se interpretan de manera cualitativa en la evaluación de las mediciones y el aprovechamiento del operador bajo la acción de realizar el análisis en cada uno de los especímenes.

En la Figura 4 se tienen los gráficos obtenidos como parte del proceso correspondiente al informe R&R del sistema de medición, para el caso de estudio.



**Figura 4.** Informe ANOVA para el análisis de medición del gage como caso de estudio en R&R.

Como fue demostrado anteriormente la Figura 4, se puede visualizar las tendencias que ofrece el análisis de R&R en conjunto con el ANOVA, con lo que se logra estructurar líneas de desarrollo involucradas de forma directa con los procesos de calidad y las áreas comunes para mejorar las condiciones en los procesos de análisis, evaluación y operadores.

### Conclusiones

Al hacer uso de casos de aplicación para temáticas de la ingeniería industrial, se favorecen a las sociedades involucradas para generar nuevas tendencias de análisis y evaluación en la ingeniería; por ello se ha trabajado con la herramienta de R&R (Repetibilidad y Reproducibilidad) en este artículo, en donde los resultados han mostrado un avance en los procesos de la ingeniería industrial.

Una parte importante al aplicar R&R en el caso de medición para un gage es que los operadores tienen que satisfacer los criterios de medición; esto establece que tienen la capacitación suficiente para el desarrollo de este estudio y a su vez considerarse como dato para nuevas aplicaciones.

De acuerdo con el análisis en las investigaciones, la mayor cantidad de inconvenientes se han encontrado en la operación de los instrumentos de medición y en este estudio ese aspecto no ha sido considerado, por la situación de que a los operadores se les capacita antes de realizar las mediciones y se les ha facilitado un instrumento de medición por persona, lo que indica que las evaluaciones son realizadas con los mismos elementos.

El reporte R&R ofrece información valiosa para cada caso de análisis y en particular involucra al operador en todo momento, específicamente en este artículo con las características comunes de M1, M2, M3, F1, F2, F3, en cuanto al rango de edad permite mantener un control en el proceso de calidad, al momento de realizar las mediciones.

El porcentaje de error que se encontró en el reporte con respecto a la práctica es de 1.3% aproximadamente, con lo que se establece que estas herramientas son fundamentales en la aplicación de la ingeniería al momento de realizar

evaluaciones consistentes, nuevamente mencionar que el control de todos los procesos debe estructurarse de tal manera que los pasos a seguir sean muy claros y específicos, para evitar los riesgos de fallo en cada uno de los procesos involucrados.

El caso de estudio seleccionado tiene como prioridad evaluar mediciones, sin embargo, se analiza en un futuro realizar nuevas evaluaciones a este producto, desde el punto de vista manufactura para lograr ampliar el espectro de análisis y complementar los estudios obtenidos en este artículo.

### Referencias

- Duarte Francisco, Braga José, Braga Allan, Jank Liana, Ayres Marcelo, Alcantara Giovana, Takao Claudio, Lazarini Carlos (2017). Repeatability, number of harvests, and phenotypic stability of dry matter yield and quality traits of *Panicum maximum* jacq. *Acta Scientiarum*, vol.39, núm. 2, pp. 149-155, Brasil.
- Llamasa Luis, Meza Luis, Botero Marcela (2007). Estudio de repetibilidad y reproducibilidad utilizando el método de promedios y rangos para el aseguramiento de la calidad de los resultados de calibración de acuerdo con norma técnica NTC-ISO/IEC 17025. *Scientia et Technica*, Año XIII, No. 35, Agosto de 2007. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Calicchio Giancarlo, Moreno Edwin (2013). Validación del estudio de repetibilidad y reproducibilidad como parte del control de calidad de una empresa agroindustrial. *Revista ASA*. ISSN: 2343-6115.
- Botero Marcela, Arbeláez Osiel, Mendoza Jairo (2007). Método ANOVA utilizado para realizar el estudio de repetibilidad y reproducibilidad dentro del control de calidad de un sistema de medición. *Scientia et Technica* Año XIII, No. 37, Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.

### Notas Biográficas

El Dr. Jesús Vicente González Sosa, es ingeniero mecánico por la Facultad de Ingeniería de la UNAM, estudio la maestría y el doctorado en Ingeniería Mecánica en esa misma institución. Se ha desempeñado como profesor en diferentes universidades públicas y privadas, además de coordinar proyectos de innovación educativa en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México, actualmente es profesor investigador en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

La Mtra. Amanda Lolita Pineda Norman, es ingeniera en irrigación por la Universidad Autónoma de Chapingo, estudio la maestría en ciencias en el Instituto de Enseñanza e Investigación en Ciencias Agrícolas, con especialidad en estadística, actualmente forma parte de los profesores de asignatura de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El Dr. José Ángel Hernández Rodríguez, es ingeniero químico industrial por parte del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de maestría en la Facultad de Ingeniería de la UNAM y el doctorado en la UAM Iztapalapa, consultor asociado, -Socio fundador de la empresa AFITNE, diferentes cargos en la UAM, actualmente es profesor investigador en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

La Mtra. Mtra. Martha Hanel González es ingeniera industrial por la Universidad Autónoma Metropolitana, actualmente realizando actividades como Coordinadora de Docencia en la UAM-AZC. Es profesora ivestigador del Departamento de Sistemas de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.