Academia Journals
OPUS PRO SCIENTIA ET STUDIUM

Humanidades, Ciencia, Tecnología e Innovación en Puebla

ISSN 2644-0903 online
Vol. 5. No. 1, 2023
www.academiajournals.com

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN AUSPICIADO POR EL CONVENIO CONCYTEP-ACADEMIA JOURNALS

Gobierno de Puebla
Hacer historia. Hacer futuro.
Secretaría de Educación
Gobierno de Puebla
CONCYTEP
Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla

Erika Garcia Rodriguez

Medidas Exteriores y Topologías Provenientes de una Selección de dos Puntos

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Asesores: Dr. Salvador García Ferreira
Dr. Ivan Martínez Ruíz
Presidente: Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Secretario: Dr. Agustin Contreras Carreto
Vocal: Dra. Maria de Jesus Lopez Toriz

Número de Secuencia 5-1-14

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Medidas exteriores y topologías provenientes de una selección de dos puntos

Tesis presentada al

Posgrado de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias

por

Erika Garcia Rodriguez

Asesorado por

Dr. Salvador García Ferreira
Dr. Ivan Martínez Ruíz

Integrantes del honorable jurado:

Presidente Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Secretario Dr. Agustin Contreras Carreto
Vocal Dra. Maria de Jesus Lopez Toriz

Puebla Pue.
7 de Julio de 2022

Medidas exteriores y topologías provenientes de una selección de dos puntos

Erika Garcia Rodriguez

Resumen

Una función f con dominio en la colección de conjuntos de dos puntos de un conjunto dado X y rango igual a X, se llama selección de dos puntos si la función evaluada en $\{x, y\}$ toma el valor ya sea x ó y para cada subconjunto $\{x, y\}$ de X. Las selecciones de dos puntos f definen un preorden $x \leq_f y$ si y sólo si $f(\{x, y\}) = x$ ó $x = y$, para cada $\{x, y\}$ de X. La topología τ_f generada por una selección de dos puntos f es la que tiene como subbase a la familia de todos los intervalos $(\leftarrow, x)_f = \{y \in X : y \leq_f x\}$ y $(x, \rightarrow)_f = \{y \in X : x \leq_f y\}$. El objetivo principal de está tesis es dar a conocer nuevas σ-álgebras de Borel y nuevas funciones medibles, usando topologías y medidas exteriores provenientes de una selección de dos puntos sobre los números reales. En este trabajo, primero se dará a conocer la teoría sobre las medidas exteriores mediante una selección de dos puntos. Posteriormente, se tendrá la teoría sobre las σ-álgebras de Borel de topologías generadas mediante selecciones de dos puntos, donde veremos que existe una familia $\{f_\nu : \nu < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de selecciones de dos puntos sobre $\mathbb{R}$ tales que $\mathcal{B}_{f_\mu}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_{f_\nu}(\mathbb{R})$ para distintos $\mu, \nu < 2^{\mathfrak{c}}$. Por último definiremos la noción de las funciones (f, g)-medibles. Con la construcción de nuevas σ-álgebras de Borel, se tiene como resultado que la medida exterior inducida por una selección de dos puntos generaliza a la medida exterior de Lebesgue y la σ-álgebra de Borel de topologias inducidas por una selección generalizan a la σ-álgebra de Borel de los números reales y además se generaliza la noción de función medible. Concluimos que está tesis se pueda usar como un texto complementario a un curso básico de Teoría de la Medida.

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

ERIKA GARCÍA RODRÍGUEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 27 de junio de 2022, con la tesis titulada:

Medidas exteriores y topologías provenientes de una selección de dos puntos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 4 de julio de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Para la mujer que amo, admiro, me da fuerzas e impulsa mis metas, mi madre Claudia.

Agradecimientos

En está etapa de mi vida profesional, la cual es la culminación de mucho esfuerzo y dedicación de una parte esencial en mi formación académica, quiero agradecer a las personas que me han apoyado a lo largo de mi maestría.

Agradezco a mi madre Claudia, por todos sus esfuerzos que me han llevado a ser un mejor ser humano en todo sentido, gracias por tu amor madre que es para mi invaluable. Siempre sigo aprendiendo de ti, de tus valores y enseñanzas. A mis hermanos gracias por siempre tener su apoyo y por alentarme a lograr mis objetivos, los amo.

Gracias a mis directores de tesis, el Dr. Salvador García Ferreira y el Dr. Ivan Martinez Ruiz, por haberme brindado la oportunidad de trabajar con ustedes. Al Dr. Salvador le doy las gracias porque me abrió las puertas desde el inicio en un verano de investigación y de ahí siempre me a depositado su confianza para seguir trabajando con él, con la enseñanza de sus valiosos conocimientos y me ha ayudado a crecer día a día profesionalmente. Al Dr. Ivan le agradezco por la confianza y el apoyo brindado desde la licenciatura, gracias profesor pues me ha guiado académicamente con su experiencia y profesionalismo a culminar las etapas más importantes de vida.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, el Dr. Agustin Contreras Carreto, la Dra. María de Jesus Lopez Toriz y el Dr. Alejandro Ramirez Paramo, por su gran apoyo y constante revisión en este trabajo, gracias por su dedicación y confianza al ser parte de mi jurado.

Gracias a todos mis profesores de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la BUAP, por brindarme lo mejor de ustedes y por la ayuda que me dieron durante toda la maestría. También le doy gracias a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por permitirme desarrollarme académicamente dentro de sus aulas.

Le doy gracias a mis abuelos y les mando un abrazo hasta el cielo, fueron las personas despues de mi madre que más me apoyaron en mi vida personal y académicament. Me enseñaron muchas cosas importantes de la vida.

Agradezco a mi prometido Marco por su apoyo incondicional, gracias amor por estar presente no solo en está etapa tan importante de mi vida, sino en todo momento ofreciendome lo mejor, con tu cariño y bondad he logrado crecer como persona.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), cuyo apoyo permitió que pudiera realizar mi posgrado y la realización de este trabajo.

Introducción

En teoría de la medida, medir conjuntos significa asignar un número (una medida) a cada conjunto. Así, una medida se puede interpretar como el tamaño de un conjunto, y por ello una medida se puede ver como una generalización de los conceptos de longitud, área y volumen.

Durante mucho tiempo hubieron varios matemáticos que quisieron tener una cierta definición de medida en donde sus propiedades cumplieran con ciertos requisitos especiales; por ejemplo, los matemáticos Stolz y Harnack, para definir la medida de un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$, consideraban conjuntos $F \supseteq E$ que eran uniones finitas de intervalos, tomaban para cada F la suma de las longitudes de los intervalos correspondientes y llamaban *medida* (exterior) de E al ínfimo de esos números. Mientras que el matemático Cantor, situándose ya desde el principio en $\mathbb{R}^n$, consideraba para un conjunto acotado E y para $\varrho > 0$, la burbuja $B(E;\varrho)$ de E formada por los puntos cuya distancia a E es a lo más ϱ y tomaba el ínfimo de los volúmenes de las burbujas $B(E,\varrho)$. Con está definición resulta que la *medida* de un conjunto es igual al de su clausura (ó adherencia), de donde se deduce que la medida de la unión de dos conjuntos ajenos puede ser estrictamente menor a la suma de las medidas de estos dos conjuntos.

Posteriormente, Guisseppe Peano y Camille Jordan introdujerón al lado de la medida de Cantor una *medida interior*, y llamaron medibles a los conjuntos en los que su medida interior y medida exterior coinciden. Con está definición, la medida de una unión numerable de conjuntos medibles y ajenos tiene la medida esperada que es igual a la suma de la medida de cada uno de los conjuntos medibles. Los trabajos de Jordan y Peano influyerón de forma decisiva en Emile Borel y en su discípulo Henri Lebesgue (1875-1941), este último nació en Beauvais (Francia), fue profesor del Collége de France. Lebesgue desarrolló con detalles su teoría de integración en su tesis doctoral Intégrale, Longueur, Aire en 1902. Particularmente, describió su medida en 1901, la cual es conocida actualmente como medida exterior de Lebesgue; está medida se basa en un concepto más general de lo que es la medida de un conjunto, y lleva a la definición de una familia de conjuntos medibles en la cual se basó en los trabajos de Carathéodory (1873-1950), donde podemos encontrar la construcción de una medida exterior sobre todos los subconjuntos de un conjunto dado y, de ahí elegir una clase de subconjuntos que satisfagan la propiedad de aditividad numerable (conjuntos medibles). Este método es conocido como la construcción de Carathéodory.

La teoría de la medida es muy general, y tiene profundas conexiones con las más diversas ramas de las matemáticas puras y aplicadas. Una muestra muy matemática rigurosa es la Teoría de la Probabilidad, propuesta por Andrey Kolmogorov en 1929. Algunas de las áreas donde la teoría de la medida ha impactado son por ejemplo el Análisis Armónico, las Ecuaciones Diferenciales Parciales, el Análisis Funcional, la Mecánica Cuántica, la Tomografía Computarizada, los Fractales, los Sistemas Dinámicos, las Finanzas Matemáticas y la Geometría Diferencial.

Para la construcción de una medida exterior básicamente se usa la longitud de aquellos subconjuntos que ya conocemos, y en el caso de la medida de Lebesgue son los intervalos semiabiertos, luego si tomamos un conjunto arbitrario y lo cubrimos de manera numerable con conjuntos cuya medida ya conocemos y sumamos las longitudes de todos los que componen la cubierta; esto nos aproxima al tamaño que le queremos asignar al conjunto dado. Dicho tamaño de nuestro conjunto será el ínfimo sobre todas las sumas de longitudes de los elementos de las cubiertas numerables que se consideren.

Durante varios años se han investigado sobre las medidas exteriores que involucren nuevas aportaciones a las matemáticas, recientemente en el año 2014 se desarrollaron nuevas medidas exteriores sobre los números reales mediante selecciones de dos puntos, las cuales generalizan de manera natural la medida de Lebesgue. Estas medidas se introdujeron de manera sistemática en el árticulo [1]. Cabe destacar que en estas medidas exteriores se pueden hacer comparaciones y podemos encontrar contraejemplos en relación con la medida exterior de Lebesgue.

Las investigaciones donde se usan selecciones de dos puntos han sido de mayor relevancia en el área de análisis y en la topología, para familiarizarnos más con este concepto damos su definición: una función f con dominio en la colección de conjuntos de dos puntos de un conjunto dado X y rango igual a X, se llama selección de dos puntos si la función evaluada en $\{x, y\}$ toma el valor ya sea x ó y para cada subconjunto $\{x, y\}$ de X. Las selecciones de dos puntos f definen un preorden $x \leq_f y$ si y sólo si $f(\{x, y\}) = x$ ó $x = y$, para cada $\{x, y\}$ de X. Se han estudiado mucho sobre las topologías que inducen estas selecciones de dos puntos (ver por ejemplo [11], [12], [13], [16] y [20]), la topología τ_f generada por una selección de dos puntos f es la que tiene como subbase a la familia de todos los intervalos $(\leftarrow, x)_f = \{y \in X : y \leq_f x\}$ y $(x, \rightarrow)_f = \{y \in X : x \leq_f y\}$.

El objetivo principal de está tesis es dar a conocer nuevas σ-álgebras de Borel y nuevas funciones medibles, usando topologías y medidas exteriores provenientes de una selección de dos puntos sobre los números reales (recordemos que la base principal de un espacio de medida es la noción de σ-álgebra). Iniciaremos este trabajo dando los conceptos básicos en el primer capítulo para desarrollar lo antes mencionado. En el segundo capítulo definiremos las medidas exteriores mediante una selección de dos puntos donde veremos las propiedades básicas, ejemplos y resultados de estas nuevas medidas y se verá en algunos casos su analogía respecto a la medida de Lebesgue y en otros resultados expuestos se visualizará que estas medidas por selecciones de dos puntos se comportan de manera caótica. Un tema importante por sí solo en Teoría de la Medida es el estudio de las σ-álgebras de Borel, en el tercer capítulo estudiaremos las σ-álgebras de Borel de topologías generadas mediante selecciones de dos puntos, en donde el objetivo principal serán las siguientes preguntas:

Pregunta 1 ¿Existe una familia $\{f_\nu : \nu < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de selecciones de dos puntos sobre $\mathbb{R}$ tales que $\mathcal{B}_{f_\mu}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_{f_\nu}(\mathbb{R})$ para distintos $\mu, \nu < 2^{\mathfrak{c}}$?

En este mismo tercer capítulo daremos la respuesta a la Pregunta 1, la cual será afirmativa bajo la suposición de que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ (ver Teorema 3.10).

Pregunta 2 ¿Existen $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ tales que contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y ninguna de éstas es la σ-álgebra de Borel de τ_f para cualquier $f \in Sel_2(\mathbb{R})$?

Para contestar está pregunta usaremos unos supuestos de teoría de conjuntos (ver Corolario 3.15).

En el cuarto capítulo, mencionamos principalmente la topología de densidad de Lebesgue y la topología de $\mathcal{I}$-densidad donde $\mathcal{I}$ será un ideal sobre $\mathbb{R}$, cabe destacar que en un curso de Teoría de la Medida, la familia de los conjuntos nulos de una medida, son normalmente despreciados en forma de que suele pensarse que no tienen propiedades ricas, sin embargo, en este penúltimo capítulo se podrá observar que se pueden hacer investigaciones a base del estudio de los conjuntos con medida nula de $\mathbb{R}$. Finalizaremos este trabajo con el capítulo cinco, donde definiremos la noción de las funciones (f, g)-medibles, en donde veremos que tienen propiedades análogas respecto a las funciones medibles, que generalizan la noción estándar de medibles. Sin embargo, habrá casos en donde las conclusiones de algunos resultados serán completamente contrarios a los ya conocidos en Teoría de la Medida.

Índice general

Introducción IX

1. Preliminares 1
- 1.1. Teoría de Conjuntos . . . 1
- 1.2. Selecciones de dos puntos . . . 2
- 1.3. Topologías por Selecciones de dos puntos . . . 5
- 1.4. Conceptos básicos de Teoría de la Medida . . . 8
- 1.5. σ-Álgebras de Borel . . . 15
- 1.6. σ-Ideales . . . 17

2. Medidas exteriores sobre $\mathbb{R}$ 19
- 2.1. Medidas exteriores mediante selecciones de dos puntos . . . 19
- 2.2. Ejemplos . . . 22

3. Conjuntos Borelianos de topologías provenientes de selecciones de dos puntos sobre $\mathbb{R}$ 26
- 3.1. σ-Álgebras de Borel de τ_f . . . 26
- 3.2. Algunas propiedades de las σ-álgebras $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ . . . 31
- 3.3. Comentarios . . . 37

4. Aplicación de Ideales a la Densidad 40
- 4.1. Topología de Densidad de Lebesgue . . . 40
- 4.2. Topología de $\mathcal{I}$-Densidad . . . 49
- 4.3. Comentarios . . . 51

5. Funciones (f, g)-medibles 52
- 5.1. Propiedades de las funciones (f,g)-medibles . . . 52
- 5.2. Comentarios . . . 56

Conclusión 57

Bibliografía 58

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo mencionamos resultados importantes que se utilizarán a lo largo de este trabajo, algunos de ellos se mencionarán brevemente, sin embargo todos estos son fundamentales para la elaboración de los siguientes capítulos.

1.1. Teoría de Conjuntos

En está sección presentamos algunos conceptos de Teoría de Conjuntos que nos servirán para desarrollar está tesis.

Notación 1.1 El número cardinal del continuo se denota por $\mathfrak{c} :=| \mathbb{R} |= 2^{\aleph_0}$.

Definición 1.2 Para un conjunto infinito X y un número cardinal α, definimos $\left[X\right]^{\alpha} = \{A \subseteq X \ : \ | A |= \alpha\}$ y de manera similar definimos $\left[X\right]^{\leq\alpha}$ y $\left[X\right]^{\geq\alpha}$.
Así mismo, particularmente dado un conjunto X distinto del vacío, definimos

$$\left[X\right]^2 = \{A \subseteq X \ : \ | A |= 2\},$$

es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de dos puntos de X, $[X]^{<\omega} := \{A \subseteq X : A \text{ es finito}\}$ y $[X]^{\leq\omega} := \{A \subseteq X : |A| \leq \omega\}$.

Definición 1.3 Sea κ un número cardinal infinito. Una familia infinita $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^{\kappa}$ es llamada *κ-casi disjunta* si $|A \cap B| < \kappa$ para disjuntos $A, B \in \mathcal{A}$.

Para un número cardinal infinito κ, se define $2^{<\kappa}$ como sigue

$$2^{<\kappa} := \sup\{2^{\lambda} : \lambda < \kappa \text{ y } \lambda \text{ es un número cardinal}\}.$$

Las familias κ-casidisjuntas que necesitaremos bajo ciertas suposiciones de la teoría de conjuntos son las siguientes. El siguiente lema es un resultado del libro [7] (Corolario 12.3(c)].

Lema 1.4 Si κ es un número cardinal infinito tal que $\kappa = 2^{<\kappa}$, entonces existe una familia κ-*casi disjunta* $\mathcal{A}$ con $|\mathcal{A}| = 2^{\kappa}$.

El siguiente corolario es un resultado inmediato del Lema 1.4.

Corolario 1.5 Si $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$, entonces existe una familia $\mathfrak{c}$-*casi disjunta* $\mathcal{A}$ con $|\mathcal{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Ahora, enunciemos un lema que nos será de gran utilidad para responder a la Pregunta 2.

Lema 1.6 Para cada cardinal $k \geq \omega$ se cumple que

$$|\{D \subseteq k \ : \ |k \setminus D| = |D| = |k|\}| = 2^k.$$

1.2. Selecciones de dos puntos

En está sección introducimos las selecciones de dos puntos, las cuales también son conocidas como selecciones débiles, así como algunos resultados derivados de ellas, donde generalmente todos estos son importantes para el desarrollo de este trabajo.

A continuación establecemos la definición de selección de dos puntos.

Definición 1.7 Una selección de dos puntos en un conjunto infinito X es una función $f : \left[X\right]^2 \to X$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \left[X\right]^2$.

El siguiente ejemplo es conocido como la selección de dos puntos Euclideana, la cual nos ayuda a tener una cercanía referente a lo que es una selección de dos puntos.

El orden Euclideano (estándar) en los números reales es denotado simplemente por $\leq$.

Ejemplo 1.8 Un ejemplo de una selección de dos puntos es la selección de dos puntos Euclideana $f_E : \left[\mathbb{R}\right]^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_E(\{x, y\}) = x \text{ si y sólo si } x < y,$$

para cada par $\{x, y\} \in \left[\mathbb{R}\right]^2$.

En la siguiente definición hacemos referencia a una selección de dos puntos especial, la cual se conoce como selección de dos puntos opuesta.

Definición 1.9 Cada selección de dos puntos $f : [X]^2 \to X$ tiene una selección de dos puntos opuesta $\hat{f} : [X]^2 \to X$ la cual se define como

$$\hat{f}(\{x, y\}) = y \text{ si y sólo si } f(\{x, y\}) = x,$$

para cada $x, y \in X$.

Definición 1.10 Dada una selección de dos puntos f en X, decimos que un punto $x \in X$ es f-*minimal* si $f\big(\{x,y\}\big) = x$ para cada $y \in X \setminus \{x\}$ y un punto $x \in X$ es un f-*maximal* si $f\big(\{x,y\}\big) = y$ para cada $y \in X \setminus \{x\}$.

Observación 1.11 De la Definición 1.10, tenemos que cada selección de dos puntos f admite como máximo un punto f-minimal y también como máximo un punto f-maximal. Así mismo los puntos f-minimales y f-maximales juegan un papel importante en ciertas propiedades en los resultados que se verán más adelante.

El simbolo $Sel_2(X)$ denota el conjunto de todas las selecciones de dos puntos definidas en un conjunto X. En este trabajo solo nos interesan principalmente las selecciones de dos puntos en la línea real $\mathbb{R}$, por lo cual omitiremos el conjunto donde esten definidas.

A continuación damos la definición sobre el pre-orden que inducen las selecciones de dos puntos, donde se sigue del artículo [20] que cada selección de dos puntos define una relación de buen-orden.

Definición 1.12 Si $f : \big[\mathbb{R}\big]^2 \to \mathbb{R}$ es una selección de dos puntos y $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$, entonces definimos $x <_f y$ si y sólo si $f(\{x,y\}) = x$, y para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos $x \leq_f y$ si $x = y$ ó $x <_f y$.

Observación 1.13 En general, está relación $\leq_f$ es reflexiva, antisimétrica y lineal. Sin embargo, puede fallar la transitividad.

El siguiente ejemplo muestra la no transitividad de está relación.

Ejemplo 1.14 Definimos la selección de dos puntos $f : \big[\mathbb{R}\big]^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = -1 \text{ y } y = 0 \\ \\ 1, & \text{si } x \in (-1,0] \text{ y } y = 1 \\ \\ x < y, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in \big[\mathbb{R}\big]^2$. Entonces tenemos que $f(\{-1,1\}) = -1$ si y sólo si $-1 <_f 1$ y $f(\{1,0\}) = 1$ si y sólo si $1 <_f 0$. Pero $f(\{-1,0\}) = 0$ y por lo tanto $0 <_f -1$.

Con el pre-orden expuesto en la Definición 1.12 tenemos la siguiente definición.

Definición 1.15 Si $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ y $r, s \in \mathbb{R}$, entonces los f-intervalos son los siguientes:

- $(r, \rightarrow)_f := \big\{x \in \mathbb{R} : r <_f x\big\}$,
- $(\leftarrow, s)_f := \big\{x \in \mathbb{R} : x <_f s\big\}$,
- $(r, s]_f := \big\{x \in \mathbb{R} : r <_f x \leq_f s\big\}$,
- $(r, s)_f := \big\{x \in \mathbb{R} : r <_f x <_f s\big\}$, *etc.*

Para la selección de dos puntos Euclideana f_E, los f_E-intervalos se denotarán simplemente por

- $(r,s) = \big\{y \in \mathbb{R} \,:\, r < y < s\big\}$,
- $(r,s] = \big\{y \in \mathbb{R} \,:\, r < y \leq s\big\}$,
- $(r,\rightarrow) = \big\{y \in \mathbb{R} \,:\, r < y\big\}$,
- $(\leftarrow,s) = \big\{y \in \mathbb{R} \,:\, y < s\big\}$, etc.

Observación 1.16 Es claro que si $r \in \mathbb{R}$ es f-maximal para alguna selección de dos puntos f, entonces $(r,s)_f = \emptyset$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$, y si r es f-minimal, entonces $(s,r)_f = \emptyset$, para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$.

Observación 1.17 En la notación del caso del intervalo Euclideano (a,b), entenderemos que $a < b$. Pero, en general la notación $(a,b)_f$ no requiere que $a <_f b$ ya que como se observó anteriormente la relación $<_f$ no es siempre transitiva.

A continuación daremos la definición de suma de dos selecciones de dos puntos, la cual será importante en nuestros posteriores ejemplos.

Definición 1.18 Sea X un conjunto infinito. Si $\{X_\mu : \mu < \kappa\}$ es una partición de X en subconjuntos infinitos $f_\nu \in Sel_2(X_\nu)$ para cada $\mu < \kappa$, entonces la función

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in X_\mu, y \in X_\nu \quad \text{y} \quad \mu < \nu < \kappa \\ f_\mu(\{x,y\}), & \text{si} \quad x,y \in X_\mu \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in [X]^2$, es una selección de dos puntos la cual es denotada por $f \oplus_{\mu<\kappa} f_\mu$.

Enseguida enunciaremos ejemplos de selecciones de dos puntos donde podemos apreciar como el pre-orden de la relación $\leq_f$ actúa sobre algunos subconjuntos de la línea real.

Ejemplo 1.19 Se puede definir $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ para ver que los f-intervalos pueden ser igual al conjunto vacío.

Definamos a la selección de dos puntos f como sigue

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0 \\ 1, & \text{si } x = 1 \text{ y } y \in (0,1) \\ x, & x < y \text{ en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. En este ejemplo obtenemos que $(0,1)_f = \emptyset$.

Proposición 1.20 Veamos que los f-intervalos también pueden ser igual a un subconjunto dado de los números reales.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$. Definamos la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \text{ y } y \in (-\infty, 0) \\ \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ y } y \in (1, +\infty) \\ \\ x, & x < y \text{ en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Entonces tenemos que $[0,1]_f = A$.

Ejemplo 1.21 Los f-intervalos pueden consistir de un solo punto.

Definiremos una selección de dos puntos f de manera que el f-intervalo $(0,1)_f$ tiene un solo punto:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0, & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0 \\ \\ 1, & \text{si } x = 1 \text{ y } y \in (0,1) \\ \\ x, & x < y \text{ en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Así $f\left(\{0, \frac{1}{2}\}\right) = 0$ y $f\left(\{\frac{1}{2}, 1\}\right) = \frac{1}{2}$ es decir, $0 <_f \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} <_f 1$ y por lo tanto $(0,1)_f = \{\frac{1}{2}\}$.

Ejemplo 1.22 Podemos definir una selección de dos puntos f para ver que los f-intervalos y los intervalos Euclidianos pueden ser muy diferentes.

Consideremos el intervalo Euclidiano (a,b), $d \notin (a,b)$ y su punto medio c. Definamos a $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ como sigue

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in (a,c] \text{ y } y = a \\ \\ a, & \text{si } x = a \text{ y } y = d \\ \\ d, & \text{si } x = b \text{ y } y = d \\ \\ x, & x < y \text{ en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Entonces tenemos que $(a,b)_f = (c,b) \cup \{d\}$ y por lo tanto $(a,b) \nsubseteq (a,b)_f \nsubseteq (a,b)$.

1.3. Topologías por Selecciones de dos puntos

Como en los espacios ordenados, una relación de buen orden definida por una selección de dos puntos también induce una topología. A continuación describiremos la topología asociada a una selección de dos puntos sobre $\mathbb{R}$, antes recordemos la siguiente definición y observación referente a los f-intervalos.

Definición 1.23 Para $r \in \mathbb{R}$ y $f \in Sel_2(\mathbb{R})$, definimos

$$(\leftarrow, r)_f := \{s \in \mathbb{R} : s <_f r\} \text{ y } (r, \rightarrow)_f := \{s \in \mathbb{R} : r <_f s\}.$$

Observación 1.24 Para dos puntos $r, s \in \mathbb{R}$, observemos que

$$(r, s)_f := (\leftarrow, s)_f \cap (r, \rightarrow)_f.$$

La topología en $\mathbb{R}$ generada por todos los f-intervalos abiertos $(\leftarrow, r)_f$ y $(r, \rightarrow)_f$, para $r \in \mathbb{R}$, será denotada por τ_f, a la cual llamaremos *Topología inducida por una selección de dos puntos.*

Notación 1.25 A continuación damos algunas notaciones referentes a la topología τ_f, las cuales utilizaremos en los capítulos posteriores de este trabajo.

(i) El conjunto de los subconjuntos cerrados en la topología τ_f será denotado como $\mathcal{C}_f$, es decir;

$$\mathcal{C}_f := \{C \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus C \in \tau_f\}.$$

(ii) Para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ el interior y la clausura de $A \subseteq \mathbb{R}$ en la topología τ_f, serán denotados simplemente por $Int_f(A)$ y $cl_f(A)$, respectivamente.

(iii) La topología Euclidiana en $\mathbb{R}$ será denotada por τ_E y sus subconjuntos cerrados por $\mathcal{C}_E$.

(iv) La siguiente notación general se utilizará con frecuencia.

Para $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ y $A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$, establecemos lo siguiente

$$(A, B)_f := (\bigcap_{a \in A} (a, \rightarrow)_f) \cap (\bigcap_{b \in B} (\leftarrow, b)_f),$$

$$[A, B)_f := (\bigcap_{a \in A} [a, \rightarrow)_f) \cap (\bigcap_{b \in B} (\leftarrow, b)_f),$$

$$(A, B]_f := (\bigcap_{a \in A} (a, \rightarrow)_f) \cap (\bigcap_{b \in B} (\leftarrow, b]_f) \text{ y}$$

$$[A, B]_f := (\bigcap_{a \in A} [a, \rightarrow)_f) \cap (\bigcap_{b \in B} (\leftarrow, b]_f).$$

(v) Si f_E es la selección Euclidiana, entonces simplemente escribimos (A, B), $[A, B]$, $(A, B]$ y $[A, B]$ donde $A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $A \cap B = \emptyset$.

Observación 1.26 Observemos que si una selección de dos puntos f no tiene un punto f-maximal ni un punto f-minimal, entonces $\{(A, B)_f : A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \text{ y } A \cap B = \emptyset\}$ es una base para τ_f.

Ejemplo 1.27 Para cada conjunto infinito X existe $f_d \in Sel_2(X)$ tal que $\tau_{f_d} = \mathcal{P}(X)$ es la topología discreta.

Demostración. Sea $\{P_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ una partición de X en subconjuntos numerables infinitos y definamos $P_\nu = \{x_\nu^n : n \in \mathbb{Z}\}$ para cada $\nu < |X|$. Ahora, definamos $f_d \in Sel_2(X)$ como sigue:

$$f_d\left(\{x_\mu^m, x_\nu^n\}\right) := \begin{cases} x_\mu^m, & \text{si} \quad \mu = \nu \quad \text{y} \quad m < n \\ \\ x_\mu^m, & \qquad \text{si} \quad \mu < \nu \end{cases}$$

para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y para cada $\mu, \nu < \mathfrak{c}$. Como para cada conjunto X y toda topología sobre el se tiene que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces solo probaremos que $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau_{f_d}$. Dada la definición de $f_d \in Sel_2(\mathbb{R})$ tenemos que para cada $a \in X$ existen $\nu < \mathfrak{c}$ y $n < \omega$ tales que $\{a\} = \{x_\nu^n\} = (x_\nu^{n-1}, x_\nu^{n+1})_{f_d} = (x_\nu^{n-1}, \rightarrow)_{f_d} \cap (\leftarrow, x_\nu^{n+1})_{f_d} \in \tau_{f_d}$. Por lo tanto τ_{f_d} es la topología discreta. ■

Enseguida daremos algunos resultados que se han recabado en el estudio de la topología τ_f, como lo es el siguiente lema.

Lema 1.28 Sea X un conjunto y sea $f \in Sel_2(\mathbb{R})$. Entonces, τ_f es una topología de Hausdorff en X.

Demostración. Tomemos dos puntos diferentes $x, y \in X$, y digamos $x <_f y$, y y encontremos conjuntos disjuntos $U, V \in \tau_f$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Si

$$(x, y)_f = \{z \in X : x <_f z <_f y\} = \emptyset,$$

entonces

$$(\leftarrow, y)_f \cap (x, \rightarrow)_f = (x, y)_f = \emptyset,$$

así, en este caso, podemos simplemente tomar

$$U = (\leftarrow, y)_f \text{ y } V = (x, \rightarrow)_f.$$

Si existe un punto $z \in (x, y)_f$ entonces por la proposición Primera, podemos establecer

$$U = (\leftarrow, z)_f \text{ y } V = (z, \rightarrow)_f.$$

■

Una propiedad importante topológica de τ_f es la mencionada en el Teorema 1.30. Antes enunciemos el siguiente lema.

Lema 1.29 Sea $x \neq y \in X$ y sea f una selección de dos puntos en X tal que $x \leftarrow y$. Entonces existen τ_f-funciones continuas $\psi : X \to [0, 1]$ y $\phi : X \to [0, 1]$ tales que:

(1) $\psi(x) = 1$ y $\psi''[y, \rightarrow)_f = \{0\}$,

(2) $\phi(y) = 1$ y $\phi''(\leftarrow, x]_f = \{0\}$.

Teorema 1.30 (cf. [19]) Para cada conjunto X y para cada $f \in Sel_2(X)$, la topología τ_f es Tychonoff (es decir, τ_f es completamente regular y Hausdorff).

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad básica de x. Entonces existen $z_0, \ldots, z_n \in X \setminus \{x\}$, para algún $n \in \omega$, tal que $U = \bigcap\{U_i : i \leq n\}$, donde $U_i = (z_i, \rightarrow)_f$ si $z_i \leftarrow x$ y $U_i = (\leftarrow, z_i)$ otro caso. Por el Lema 1.29, para cada $i \leq n$ podemos encontrar una función continua $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\psi_i(x) = 1$ y $\psi_i''[X \setminus U_i] = \{0\}$. Sea $\psi : X \rightarrow [0, 1]$ definida por $\psi = \prod\{\psi_i : i \leq n\}$. Claramente, ψ es continua y $\psi(x) = 1$. Si $z \notin U$ entonces $z \notin U_i$ para algún $i \leq n$ y así $\psi_i(z) = 0$, lo cual implica que $\psi(z) = 0$. Por lo tanto, $\psi''(X \setminus U) = \{0\}$, Concluimos que τ_f es Tychonoff. ■

Otra propiedad importante la podemos encontrar en el artículo [13], en donde los autores construyeron $f \in Sel_2(\mathbb{P})$, (donde $\mathbb{P}$ denota los números irracionales) tal que el espacio topológico $(\mathbb{P}, \tau_f)$ no es un espacio normal.

1.4. Conceptos básicos de Teoría de la Medida

Para conocer los hechos sobre los resultados referentes a la Teoría de la Medida que solo mencionaremos, se recomienda consultar el libro [5].

Los siguientes conceptos nos ayudarán para definir lo que se conoce como un espacio de medida. Se mencionan algunas propiedades relevantes de las σ-álgebras y medidas que tendrán mucha relevancia en las σ-álgebras de Borel mediante selecciones de dos puntos y sus respectivos resultados posteriores.

Definición 1.31 Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra en X si

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$, y

(iii) si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

A continuación damos la definición de *la σ-álgebra generada por una familia de conjuntos*, la cual utilizaremos durante el capítulo tercero de este trabajo.

Notemos que cualquier familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío X, está contenida en la σ-álgebra 2^X de todos los subconjuntos de X. También está contenida en una σ-álgebra más pequeña, la cual definimos a continuación. Además, es posible verificar que si Ψ es una colección de σ-álgebras en X, entonces $\bigcap_{\mathcal{C}\in\Psi} \mathcal{C}$ es una σ-álgebra en X.

Definición 1.32 Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se define la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, la cual se denota por $< \mathcal{A} >$ (ó $\mathcal{B}(\mathcal{A})$), como sigue:

$$< \mathcal{A} > = \bigcap\{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{D} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Y si $Y \subseteq X$, entonces $\mathcal{A} \cap Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$.

A continuación se enuncian algunos ejemplos de σ-álgebras de los cuales nombramos a la σ-álgebra de los conjuntos numerable y conumerables en un conjunto dado.

Ejemplo 1.33 Para cualquier conjunto no vacío X, tenemos que:

1. $\{X, \emptyset\}$ es una σ-álgebra.

2. $\mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra.

3. Para cada conjunto X no numerable, se tiene que la familia

$$\mathcal{C}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es numerable ó } X \setminus A \text{ es numerable}\}$$

es una σ-álgebra y es conocida como la σ-álgebra de los conjuntos numerables y conumerables.

Demostración. Probaremos que $\mathcal{C}(X)$ es una σ-álgebra. En efecto,

(i) Es claro que $X \in \mathcal{C}(X)$.

(ii) Sea $A \in \mathcal{C}(X)$ entonces A es numerable ó A^c es no numerable. Si A es numerable entonces como $A = (A^c)^c$ esto implica que $A^c \in \mathcal{C}(X)$, y es inmediato que si A^c es numerable entonces $A \in \mathcal{C}(X)$. Por lo tanto $\mathcal{C}(X)$ es cerrada bajo complementos.

(iii) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Consideremos los siguientes caso:

Caso I. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ A_n es numerable entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}(X)$.

Caso II. Supongamos ahora que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^c_{n_0}$ es numerable. Luego, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^c_n \subseteq A^c_{n_0}$ entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^c_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ es numerable, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}(X)$. Por lo tanto $\mathcal{C}(X)$ es cerrada bajo uniones numerables. ∎

Utilizaremos la σ-álgebra de los conjuntos numerables y conumerables en el tercer capítulo para dar respuesta a una de las preguntas más importantes dentro de este trabajo.

Los siguientes lemas serán relevantes en el capítulo tercero de este trabajo.

Lema 1.34 Sea $\gamma : X \to Y$ una función sobreyectiva y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en Y. Entonces

$$\gamma^{-1}(\mathcal{A}) = \{\gamma^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

es una σ-álgebra en X.

Demostración. (i) Por ser $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en Y tenemos que $\emptyset, Y \in \mathcal{A}$ y además sabemos que $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $\gamma^{-1}(Y) = X$, así $\emptyset, X \in \gamma^{-1}(\mathcal{A})$.

(ii) Si $E \in \gamma^{-1}(\mathcal{A})$ entonces $E = \gamma^{-1}(A)$ para algún $A \in \mathcal{A}$, así tenemos que $E^c = X \setminus E = X \setminus \gamma^{-1}(A) = \gamma^{-1}(Y \setminus A)$ y puesto que $Y \setminus A \in \mathcal{A}$ esto por ser $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en Y tenemos que $E^c \in \gamma^{-1}(\mathcal{A})$.

(iii) Si $E_j \in \gamma^{-1}(\mathcal{A})$ con $j \in \mathbb{N}$, entonces $E_j = \gamma^{-1}(A_j)$ con $j \in \mathbb{N}$ y $A_j \in \mathcal{A}$, luego

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \gamma^{-1}(A_j) = \gamma^{-1}\big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\big),$$

y puesto que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A}$ una σ-álgebra, así obtenemos que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \gamma^{-1}(\mathcal{A})$.

Por lo tanto $\gamma^{-1}(\mathcal{A})$ es una σ-álgebra en X. ∎

Lema 1.35 Sea $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ donde X_i es infinito para cada $i \in I$ y $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Si para cada $i \in I$ se cumple que $\mathcal{A}_i$ es σ-álgebra en X_i respectivamente, entonces

$$\oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i := \{\bigcup_{i\in I} A_i \ : \ A_i \in \mathcal{A}_i \text{ para cada } i \in I\}$$

es una σ-álgebra en X. En particular, sea $\{X, Y\}$ una partición de $\mathbb{R}$ en dos subconjuntos infinitos. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras en X y Y respectivamente, entonces

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A} \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$$

es una $\sigma-$álgebra en $\mathbb{R}$.

Demostración. Veremos que cada uno de los incisos dados en la Definición 1.31 se cumplen y así probar que $\oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$ efectivamente es una σ-álgebra en X.

(i) Dado que $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ y además para cada $i \in I$ $X_i \in \mathcal{A}_i$ por ser $\mathcal{A}_i$ σ-álgebra en X_i respectivamente, obtenemos que $X \in \oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

(ii) Si $E \in \oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$ entonces para cada $i \in I$, existe $A_i \in \mathcal{A}_i$ tal que $E = \bigcup_{i\in I} A_i$ donde para cada $i \in I$ se tiene que $\mathcal{A}_i$ es σ-álgebra en X_i respectivamente. Entonces

$$X \setminus E = \bigcup_{i\in I} X_i \setminus \bigcup_{i\in I} A_i,$$

y como $\{X_i : i \in I\}$ es una partición de X y $A_i \subseteq X_i$ para toda $i \in I$ obtenemos que

$$X \setminus E = \bigcup_{i\in I}(X_i \setminus A_i)$$

y como $X_i \setminus A_i \in \mathcal{A}_i$ para cada $i \in I$ entonces $X \setminus E \in \oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

(iii) Si $\{D_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_i^n \in \mathcal{A}_i$ para cada $i \in I$ tal que $D_n = \bigcup_{i\in I} A_i^n$ entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i\in I} A_i^n = \bigcup_{i\in I}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n)$$

y como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n \in \mathcal{A}_i$ y para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ es σ-álgebra en X_i respectivamente. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \oplus_{i\in I}\mathcal{A}_i$. ∎

Enseguida se definirán conceptos importantes de la Teoría de la Medida, tal y como lo es la siguiente definición.

Definición 1.36 Sea X un conjunto. Una medida exterior es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Monotonía: Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(3) Subaditividad: Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(X)$ se tiene que

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Usualmente en los libros de Teoría de la Medida, la notación para hacer referencia a una medida exterior arbitraria es μ^* y se emplea λ^* para referirse a la medida exterior de Lebesgue. A lo largo de este trabajo, emplearemos la notación μ y λ para referirnos a estas medidas exteriores.

Las siguientes definiciones son muy importantes y útiles en el estudio de la Teoría de la Medida y en este trabajo las utilizaremos para dar resultados sobre las medidas exteriores mediante selecciones de dos puntos.

Definición 1.37 Dada una σ-algebra $\mathcal{A}$, una medida es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Aditividad: Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ son disjuntos entre si, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Al par $(X, \mathcal{A})$ donde X es un conjunto de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-algebra, se le llama espacio medible. Si $\mathcal{A}$ es una σ-algebra y una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una medida, a la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le conoce como un espacio de medida.

Definición 1.38 Sea $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una medida exterior y $A \subseteq X$.

(i) Decimos que A es medible si para cada $B \subseteq X$ se cumple que

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

(ii) El conjunto de todos los subconjuntos medibles de un conjunto dado X se denota por

$$\mathcal{M}_\mu := \{A \subseteq X : A \text{ es medible}\}.$$

Definición 1.39 Sea $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una medida exterior y $A \subseteq X$.

(i) Si $\mu(A) = 0$, entonces decimos que A es μ-nulo (o nulo).

(ii) [Conjunto Nulo] Al conjunto de todos los subconjuntos nulos lo denotamos por

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \subseteq X : A \text{ es nulo}\}.$$

A base de la Definición 1.38 tenemos la siguiente observación relevante, la cual ayuda en el proceso de reconocer a un conjunto medible.

Observación 1.40 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq X$, se tiene que $B = (B \cap A) \cup (B \backslash A)$. Así podemos decir que gracias a la monotonía de μ siempre sucede que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \backslash A).$$

Entonces para ver que un conjunto A sea medible basta demostrar que para cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumpla que

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B).$$

Los siguientes conjuntos son los ejemplos más simples de conjuntos medibles y conjuntos nulos.

Ejemplo 1.41 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ cualquier espacio de medida.

(i) $X, \emptyset \in \mathcal{M}_\mu$.

(ii) $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.

(iii) Si μ es la medida nula, entonces $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{P}(X)$.

A continuación hacemos una observación referente a la relación que existe entre los conjuntos medibles y los conjuntos nulos.

Observación 1.42 Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}_\mu$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_\mu$ y sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera.

Por un lado, tenemos que $B \cap A \subseteq A$ de esto se sigue que $0 \leq \mu(B \cap A) \leq \mu(A) = 0$ y que $\mu(B \backslash A) \leq \mu(B)$. Así, también tenemos la desigualdad

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B).$$

Y además por otra parte observemos que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Por lo tanto, A es medible. ■

El siguiente teorema es un resultado que se ha utilizado demasiado en la Teoría de la Medida por los varios resultados que puede ofrecer cuando se estudian los espacios de medida a traves de los conjuntos medibles.

Teorema 1.43 Si $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ es medida exterior, entonces

1) $\mathcal{M}_\mu$ es σ-álgebra.

2) $(X\ ,\ \mathcal{M}_\mu\ ,\ \mu_{|\mathcal{M}_\mu})$ es un espacio de medida.

Continuamos con un ejemplo de medida exterior, la cual también es considerada como la más simple.

Ejemplo 1.44 [Medida Exterior Nula] Dado un conjunto infinito X, definimos $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

A continuación enlistamos más ejemplos de medidas exteriores, no obstante el lector puede consultar el libro [4] para tener más amplitud acerca de estos ejemplos y otros más.

Ejemplo 1.45 Para cualquier conjunto infinito X, definamos

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset \\ \\ +\infty, & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo 1.46 [Medida de Contar] Para cualquier conjunto infinito X, definamos

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{si } A \text{ es finito} \\ \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

Ejemplo 1.47 Para cualquier conjunto infinito X, definamos

$$\nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ es numerable} \\ \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es no numerable} \end{cases}$$

En el siguiente ejemplo, se extiende el concepto de longitud de un intervalo a subconjuntos de $\mathbb{R}$ más generales. De igual manera estará familiarizada con nuestra definición de medida exterior mediante selecciones de dos puntos (ver el siguiente capítulo).

Ejemplo 1.48 [Medida Exterior de Lebesgue] La medida exterior de Lebesgue de $A \subseteq \mathbb{R}$ es

$$\lambda(A) = inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n| : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]\right\}.$$

Claramente $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, $\lambda((0,1)) = 1$ y si C es el conjunto de Cantor entonces $\lambda(C) = 0$.

Es importante recalcar que la medida exterior de Lebesgue de cada conjunto unipuntual es 0, sin embargo veremos que esto puede no ocurrir para las medidas exteriores que presentaremos en el capítulo 2.

Ejemplo 1.49 [Medida Exterior de Borel-Stieltjes] Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente continua por la derecha. La medida exterior de Borel Stieltjes en $\mathbb{R}$ generada por la función f es

$$\lambda_f(A) = inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(b_n) - f(a_n)| : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]\right\},$$

para cada $A \subseteq \mathbb{R}$.

Como bien hemos visto los conjuntos medibles son de suma importancia en los conceptos básicos que están dentro de la Teoría de la Medida, sin embargo uno podria preguntarse si existen conjuntos que no sean medibles, el matemático Vitali probó que efectivamente existe un conjunto tal que no sea medible, está prueba la damos a continuación.

Teorema 1.50 Existe un subcojunto de $\mathbb{R}$, y de hecho del intervalo $(0,1)$, que no es Lebesgue medible.

Demostración. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ de manera que $x \sim y$ se cumpla si y sólo si $x - y$ es racional. Es fácil checar que $\sim$ es una relación de equivalencia: es reflexiva ($x \sim x$ se cumple para cada x), simétrica ($x \sim y$ implica $y \sim x$), y transitiva ($x \sim y$ y $y \sim z$ implica $x \sim z$). Notemos que cada clase de equivalencia bajo $\sim$ tiene la forma $\mathbb{Q} + x$ para algún x, y por lo tanto es denso en $\mathbb{R}$. Como estas clases de equivalencia son disjuntas, y dado que cada uno intersecta al intervalo $(0,1)$, podemos usar el axioma de elección para formar un subconjunto E de $(0,1)$ que contenga exactamente un elemento de cada clase de equivalencia. Probaremos que el conjunto E no es Lebesgue medible.

Sea $\{r_n\}$ una enumeración de los números racionales en el intervalo $(-1,1)$, y para cada n sea $E_n = E + r_n$. Afirmamos que:

(a) los conjuntos E_n son disjuntos,

(b) $\bigcup_n E_n$ esta contenido en el intervalo $(-1,2)$, y

(c) el intervalo $(0,1)$ esta contenido en $\bigcup_n E_n$.

Para (a) notemos que si $E_m \cap E_n \neq \emptyset$, entonces existen elementos e y e' de E tales que $e + r_m = e' + r_n$; de aqui obtenemos que $e \sim e'$ y por lo tanto que $e = e'$ y $n = m$. Así (a) queda demostrada.

La afirmación (b) se sigue de la inclusión de que $E \subseteq (0,1)$ y del hecho de que el término final de la sucesión $\{r_n\}$ pertenece a $(-1,1)$.

Ahora consideremos la afirmación (c). Sea x un elemento arbitrario de $(0,1)$, y sea e el elemento de E que satisface $x \sim e$. Entonces $x - e$ es racional y pertenece a $(-1,1)$ (recordemos que ambos x y e pertenecen a $(0,1)$), y asi tiene la forma r_n para algún n. Por lo tanto $x \in E_n$, y queda probada (c).

Supongamos que el conjunto E es Lebesgue medible. Entonces para cada n el conjunto E_n es medible, y asi la propiedad (a) anterior implica que

$$\lambda\Big(\bigcup_n E_n\Big) = \sum_n \lambda(E_n);$$

además, la translación-invarianza de λ implica que $\lambda(E_n) = \lambda(E)$ se cumple para cada n. Por lo tanto si $\lambda(E) = 0$, entonces $\lambda(\bigcup_n E_n) = 0$, contradiciendo la afirmación (c) anterior, mientras si $\lambda(E) \neq 0$, entonces $\lambda(\bigcup_n E_n) = +\infty$, contradiciendo la afirmación (b). Por lo tanto la suposición de que E es medible conduce a una contradicción, y asi concluimos la demostración. ■

A continuación daremos una prueba distinta del teorema anterior, dicha demostración utiliza algunos conceptos de la teoría de grupos, antes enunciemos el siguiente lema destacado.

Lema 1.51 (H. Stanhouse) Si $E \in \mathcal{M}_\lambda$ con $0 < \lambda(E)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$(-\delta, \delta) \subseteq E - E = \{e - f : e, f \in E\}.$$

Demostración. Existe $K \subseteq E$ compacto tal que $0 < \lambda(K)$ y existe U abierto tal que $0 < \lambda(U) < 2\lambda(K)$ con $K \subseteq U$. Ponemos $0 < \delta = d(K, \mathbb{R} \setminus U)$. Observemos que para cada $t \in (-\delta, \delta)$ tenemos que $t + k \subseteq U$ y $(t + k) \cap K \neq \emptyset$. Sea $t \in (-\delta, \delta)$ entonces existen $x, y \in K$ tales que $t + x = y$ y por lo tanto $t = y - x \in K - K \subseteq E - E$. ■

Teorema 1.52 (Teorema de Vitali) $0 < G \triangleleft \mathbb{R}$ denso numerable. Si E tiene un representante de cada clase de equivalencia de $\mathbb{R}/G$, entonces E no es medible.

Demostración. Supongamos que E es medible. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $0 < \lambda(E)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq E - E$ esto implica que existen $g \in G \setminus \{0\}$ y $e, f \in E$ tales que $g = e - f \in G$ lo cual es una contradicción pues $e \nsim f$ mod G.

Caso 2. Si $\lambda(E) = 0$, entonces $\mathbb{R} = E + G = \bigcup_{g \in G} E + g$ por lo que $\lambda(\mathbb{R}) \leq \sum_{g \in G} \lambda(E + g)$ y así $\lambda(\mathbb{R}) = 0$ lo cual es una contradicción.

Por lo anterior, concluimos que E no es medible. ■

1.5. σ-Álgebras de Borel

En está sección enunciaremos la definición de la σ-álgebra de Borel, está σ-álgebra es muy importante en el estudio de la Teoría de la Medida, y su uso en este trabajo no será la excepción de su gran importancia en el desarrollo de toda la tesis. De igual manera exhibiremos la construcción inductiva de esta misma.

Definición 1.53 Dado un espacio topológico (X, τ), a la σ-álgebra generada por la topología τ, denotada por $\mathcal{B}(\tau)$, le llamaremos la *σ-álgebra de Borel del espacio topológico* (X, τ). Y a cada elemento de $\mathcal{B}(\tau)$ se le llamara conjunto boreliano.

A continuación, recordaremos una de las construcciones inductivas de una σ-álgebra generada por una familia de subconjuntos de un conjunto dado, dicha construcción es relevante para los resultados que se llevan a cabo durante el capítulo tercero de está tesis.

Sean X un conjunto y $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia. De manera recursiva definamos los siguientes conjuntos:

- Primero definamos $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cup \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$.
- $\mathcal{A}_1 := \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \mathcal{A}_0)\}$.
- $\mathcal{A}_2 := \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \mathcal{A}_1)\}$.

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

- $\mathcal{A}_\alpha := \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$ si $\alpha < \omega_1$ y α es par.
- $\mathcal{A}_\alpha := \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$ si $\alpha < \omega_1$ y α es impar.

Proposcón 1.54 Dada la anterior construcción inductiva se tiene que

(1) $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$ es una σ-álgebra.

(2) $< \mathcal{A} >= \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$.

Demostración. Probemos (1). Pongamos $\mathcal{C} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$. Ahora probemos cada una de las cláusulas de la Definición 1.31:

(i) Claramente $X \in \mathcal{C}$ ya que $X \in \mathcal{A}_0$.

(ii) Si $C \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$ entonces, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $C \in \mathcal{A}_\alpha$, y observemos que al número ordinal α lo podemos escribir como $\alpha = \nu + n$ donde ν es un ordinal y $n \in \mathbb{N}$. Ahora consideremos los siguientes casos:

Caso 1. n es impar.

Si $C \in \mathcal{A}_\alpha := \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$ entonces $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde $A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$ entonces $X \setminus C = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}_{\alpha+1} := \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$ donde $\alpha + 1$ es par. Por lo tanto $X \setminus C \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$.

Caso 2. n es par.

Si $C \in \mathcal{A}_\alpha := \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$ entonces $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde $A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$ entonces $X \setminus C = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A}_{\alpha+1} := \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta)\}$. Por lo tanto $X \setminus C \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$.

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo complementos.

(iii) Si $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{A}_{\theta_n} \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$ con $\theta_n < \omega_1$ tal que $C_n \in \mathcal{A}_{\theta_n}$. Sea $\theta = sup\{\theta_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} < \omega_1$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}, \theta_n < \theta$ y $C_n \in \mathcal{A}_{\theta_n} \subseteq \mathcal{A}_{\theta+n}$ con $\theta + n$ par, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{A}_{\theta+n+2} = \bigcup_{\alpha<\theta+2} \mathcal{A}_\alpha$.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es cerrada bajo uniones numerables. Concluimos que $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ es σ-álgebra.

Para (2). Probaremos que $< \mathcal{A} >= \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$, para ello demostraremos que $\mathcal{A} \subseteq< \mathcal{A} >$ y que si $\mathcal{A}'$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Claramente $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$ ya que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_0$. Luego, sea $\mathcal{A}'$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$. Por inducción probemos que $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}'$. Por hipótesis $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ y por definición de $\mathcal{A}_0$ tenemos que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}'$. Supongamos que $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}'$ para cada $\alpha < \theta < \omega_1$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si θ es un ordinal limite entonces $\mathcal{A}_\theta = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\theta} \mathcal{A}_\beta)\} \subseteq \mathcal{A}'$ por ser $\mathcal{A}'$ una σ-álgebra.

Caso 2. Si θ no es un ordinal limite entonces $\mathcal{A}_\theta = \{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ : \ \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in \bigcup_{\beta<\theta} \mathcal{A}_\theta)\} \subseteq \mathcal{A}'$ por ser $\mathcal{A}'$ una σ-álgebra. ■

De manera análoga para un espacio topológico (X, τ), podemos seguir los pasos de la construcción anterior para el caso de la σ-álgebra generada por la topologia τ, es decir la σ-álgebra de Borel.

Finalmente nos gustaria observar que dos topologías completamente distintas pueden tener la misma σ-álgebra de Borel, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

Ejemplo 1.55 El espacio topologico $(\mathbb{R}, \tau_E)$ y la recta de Sorgenfrey tienen la misma σ-álgebra de Borel. Se probó en [18] que la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$ es inducida por una selección de dos puntos, digamos f_S, y sabemos que τ_E y τ_{f_S} tienen diferentes propiedades topológicas pero tienen la misma σ-álgebra de Borel. Para esto se prueba que la σ-álgebra de los reales con la topología Euclideana coincide con la σ-álgebra de Borel de la recta de Sorgenfrey. En efecto, basta observar que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ $(a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a, b + \frac{1}{n})$.

1.6. σ-Ideales

En está última sección de este capítulo, damos la definición de un σ-ideal, veremos propiedades y ejemplos que enmarcan a estas familias, las cuales son importantes para el desarrollo del capítulo cuarto de este trabajo.

Definición 1.56 Sea X un conjunto infinito. Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama ideal si

(a) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(b) Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.

(c) $\mathcal{I}$ es cerrado bajo uniones finitas.

Un ideal $\mathcal{I}$ se llama σ-ideal (P-ideal) si es cerrado bajo uniones numerables.

Enseguida enunciamos algunos ejemplos referentes a ideales, al igual que veremos que los conjuntos mencionados en la Definición 1.2 son ideales.

Ejemplo 1.57 $\{\emptyset\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son ejemplos triviales de σ-ideales. Si X es infinito, entonces $\left[X\right]^{<\omega}$ es un ideal y $\left[X\right]^{\leq\omega}$ es un σ-ideal.

A continuación veremos que las medidas exteriores nos proporcionan más ejemplos de σ-ideales.

Teorema 1.58 Si $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ es una medida exterior, entonces $\mathcal{N}_\mu$ es un σ-ideal.

Demostración. Veamos que se cumple cada inciso de la Definición 1.56.

(a) Claramente $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.

(b) Si $B \in \mathcal{N}_\mu$ y $A \subseteq B$, entonces por la monotonía de μ, se tiene que $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) \leq 0$, así que $A \in \mathcal{N}_\mu$.

(c) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}_\mu$. Entonces por la σ-subaditividad de μ tenemos que $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$, luego se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}_\mu$.

Así, por lo tanto $\mathcal{N}_\mu$ es un σ-ideal. ∎

La siguiente definición es un tipo de "operación" que existe en el estudio de los ideales.

Definición 1.59 La suma de dos ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ es:

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} = \{I \cup J : I \in \mathcal{I} \text{ y } J \in \mathcal{J}\}.$$

La suma de dos ideales $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es también un ideal. Más aún, si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son σ-ideales, entonces $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es un σ-ideal. En efecto:

(a) Es evidente que $\emptyset \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, pues $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son σ-ideales.

(b) Si $B \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ y $A \subseteq B$, entonces $A \subseteq I \cup J$ para algunos $I \in \mathcal{I}$ y $J \in \mathcal{J}$. Luego, como $A = (A \cap I) \cup (A \cap J)$, tenemos que $A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, ya que $(A \cap I) \in \mathcal{I}$ y $(A \cap J) \in \mathcal{J}$, debido a que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son σ-ideales.

(c) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Entonces tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = I_n \cup J_n$ para algunos $I_n \in \mathcal{I}$ y $J_n \in \mathcal{J}$. Luego, puesto que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son σ-ideales tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cup J_n) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n\right) \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$.

Enseguida enunciamos la definición dual de un ideal, la cual la utilizaremos en el Capítulo 4 de este trabajo.

Definición 1.60 $\mathcal{F} \subseteq X$, es un filtro en X si

(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(b) $R, S \in \mathcal{F}$ entonces $R \cap S \in \mathcal{F}$.

(c) Si $R \in \mathcal{F}$ y $R \subseteq S$, entonces $S \in \mathcal{F}$.

El siguiente ejemplo de igual manera lo utilizaremos en el capítulo 4 donde haremos referencia en él al estudiar el concepto de $\mathcal{I}$-densidad.

Ejemplo 1.61 Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre X, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$ denota el filtro dual del ideal $\mathcal{I}$.

Capítulo 2

Medidas exteriores sobre $\mathbb{R}$

En este capítulo presentamos una medida exterior que al igual que la medida exterior de Lebesgue, tiene la importancia de estar definida para todos los conjuntos en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y además es una función que extiende la noción de longitud de un intervalo, pues utiliza la longitud de los intervalos para determinar el tamaño de un subconjunto de $\mathbb{R}$.

2.1. Medidas exteriores mediante selecciones de dos puntos

A continuación enunciaremos la principal definición de está tesis, la medida exterior inducida por una selección de dos puntos.

Definición 2.1 Sea $f : [\mathbb{R}]^2 \to \mathbb{R}$ una selección de dos puntos en $\mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, la medida exterior inducida por f es la función $\lambda_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ definida para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ como

$$\lambda_f(A) = inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n| : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]_f \right\},$$

si existe una cubierta numerable de A mediante f-intervalos semiabiertos y si no existe tal cubierta definimos $\lambda_f(A) = +\infty$.

Está función $\lambda_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ es una medida exterior sobre los números reales $\mathbb{R}$ la cual generaliza a la medida exterior de Lebesgue.

A continuación demostraremos que está función es una medida exterior sobre los números reales.

Teorema 2.2 Para cada selección de dos puntos f, λ_f es una medida exterior en $\mathbb{R}$.

Demostración. Veamos que se cumple cada inciso de la definición de medida exterior.

(1) Para el conjunto vacío es evidente que su medida exterior es cero y para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$ se cumple $\lambda_f(A) \geq 0$.

(2) Para la monotonía tenemos que si $A \subseteq B$ entonces toda cubierta numerable por f-intervalos semiabiertos de B también cubre a A. Si no existe tal cubierta la desigualdad se dá claramente.

(3) Para la subaditividad, sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en $\mathbb{R}$. Si alguno de éstos conjuntos no puede ser cubierto por una sucesión de f-intervalos tampoco podrá serlo la unión de ellos. Por lo cual, la desigualdad buscada se obtiene de manera inmediata. En el caso en que exista la cubierta se toman en cuenta los siguientes casos:

◇ Primer caso, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f(A_n) = +\infty$ la desigualdad deseada es clara.

◇ Segundo caso, supongamos que está suma es finita. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos una cubierta $\{(a_{n,j}, b_{n,j}]_f : j \in \mathbb{N}\}$ de f-intervalos semiabiertos tales que cubran a A_n y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |b_{n,j} - a_{n,j}| < \lambda_f(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{2.1}$$

Lo anterior es posible porque λ_f es el ínfimo sobre todas las sumas de las longitudes de los f-intervalos de las cubiertas numerables de A_n. Haciendo $B_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(a_{n,j}, b_{n,j}]_f$, tenemos

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una biyección. Reordenando por medio de σ tenemos lo siguiente:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f.$$

Como la $\sum_{i\in\mathbb{N}}(a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f$ es convergente y por la desigualdad (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lambda_f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \lambda_f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) &= \lambda_f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f\Big) \\
&= \lambda_f\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]_f\Big) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\, b_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i)} \,| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\, b_{n,j} - a_{n,j} \,| \\
&< \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_f(A_n) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Al ser ϵ arbitrario, se tiene la propiedad deseada.

■

Enseguida enunciamos las primeras notaciones referentes a la medida exterior λ_f.

Notación 2.3 • A la medida exterior inducida por $f \in Sel_2(\mathbb{R})$; λ_f, la llamaremos f-medida exterior.

• La σ-álgebra de los subconjuntos λ_f-medibles la denotaremos por $\mathcal{M}_f$, para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

• Así mismo $\mathcal{N}_f$ denotará el σ-ideal de los subconjuntos λ_f-nulos de $\mathbb{R}$, para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

La siguiente observación es un tipo de relación que se tiene de la selección de dos puntos Euclideana f_E con la medida exterior de Lebesgue λ.

Observación 2.4 Si $f = f_E$, entonces $\lambda_{f_E} = \lambda$ es la medida exterior de Lebesgue.

En efecto, para cada (a, b) intevalo Euclideano se tiene que si $r \in (a, b)$, entonces $f_E(\{a, r\}) = a$ y $f_E(\{r, b\}) = r$, así $r \in (\leftarrow, b)_{f_E} \cap (a, \rightarrow)_{f_E} = (a, b)_{f_E}$ y si $r \in (a, b)_{f_E}$, entonces $a <_{f_E} r$ y $r <_{f_E} b$, y por la definición de la selección de dos puntos Euclideana, se tiene que $r \in (a, b)$. Por lo que los f_E-intervalos y los intervalos Euclideanos coinciden. Por último tenemos que $\lambda_{f_E}((a, b)) = \lambda_{f_E}((a, b)_f) = |b - a| = \lambda((a, b))$.

El siguiente teorema nos menciona acerca de que en las f-medidas exteriores tenemos que la medida exterior de un punto es 0.

Teorema 2.5 Sean $X \in [\mathbb{R}]^{\omega}$, $x \in X$ y f una selección de dos puntos sin f-minimal, entonces $\lambda_f(\{x\}) = 0$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.
$(*)$ Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$ es tal que $a_n \to x$ y $a_n <_f x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces como $x \in (a_n, x]_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ entonces $\lambda_f(\{x\}) < |x - a_n| < \epsilon$. Por lo tanto $\lambda_f(\{x\}) = 0$.

Ahora supongamos que no se cumple $(*)$. Puesto que f es una selección de dos puntos sin f-minimal ni f-maximal, entonces existen puntos $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (s, t)_f$. Y puesto no se cumple $(*)$ tenemos que, existe $N > 0$ tal que para todo $y \in (x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N})$ se tiene $x <_f y$. Afirmamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que si $a <_f x$ entonces para cada $y \in (a, x)$ (o bien $y \in (x, a)$) se tiene que $x <_f y$.

En efecto, sin pérdida de generalidad, sea $b < x$ y definamos $a = sup\{y \in (b, x) : y <_f x\}$, luego $a <_f x$ y además como $a \leq x - \frac{1}{N} < x$, tenemos que para cada $y \in (a, x)$ se tiene que $x <_f y$.

Ahora bien, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión convergente a a y por la afirmación anterior, notemos que $a < a_n < x$ para cada $n \in \{1, ..., N - 1\}$ entonces, por la misma afirmación, obtenemos que $x <_f a_n$, esto implica que $x \in (a, a_n]_f$. Y por lo tanto $\lambda_f(\{x\}) = 0$. ∎

El siguiente corolario son derivados del Teorema 2.5, el cual hace más enfasis cuando la medida exterior mediante una selección de dos puntos de un punto será un número ó $+\infty$.

Corolario 2.6 Para cada selección de dos puntos f y para cada $r \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lambda_f(\{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ no es } f\text{-minimal,} \\ +\infty & \text{si } x \text{ es } f\text{-minimal.} \end{cases}$$

Teorema 2.7 Sean f y g dos selecciones de dos puntos sin f,g-minimales. Si existe $M \in [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ tal que $x <_f y \iff x <_g y$ y $|M \cap \{x, y\}| < 1$ para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$, entonces $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Observación: $A \cap (a_n, b_n]_f = A \cap (a_n, b_n]_g$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (a_n, b_n]_f &\iff x \in A \text{ y } a_n <_f x \leq_f b_n. \\
&\iff x \in A \text{ y } a_n <_g x \leq_f b_n. \\
&\iff x \in A \text{ y } a_n <_g x \leq_g b_n. \\
&\iff x \in A \cap (a_n, b_n]_g.
\end{aligned}
$$

Ahora para la medida exterior inducida por las selecciones de dos puntos f y g tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\{(a_n, b_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta numerable de f-intervalos semiabiertos para A. Así tenemos por la observación anterior, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$
A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_g.
$$

Entonces por una parte, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\lambda_g(A) \leq \lambda_g\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_g\Big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_g\Big(a_n^k, b_n^k]_g\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f\Big((a_n^k, b_n^k]_f\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^k - a_n^k|,
\end{aligned}
$$

es decir $\lambda_g(A) \leq \lambda_f(A)$. Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\lambda_f(A) \leq \lambda_f\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_f\Big) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f\Big((a_n^k, b_n^k]_f\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_g\Big((a_n^k, b_n^k]_g\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^k - a_n^k|,
\end{aligned}
$$

entonces $\lambda_f(A) \leq \lambda_g(A)$. Por lo tanto $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$.

Caso 2. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ no se puede cubrir por una cubierta numerable de f-intervalos entonces por la observación del inicio tampoco se podra cubrir por una cubierta numerable de g-intervalos y viceversa. Entonces tenemos que $\lambda_f(A) = +\infty$ y $\lambda_g(A) = +\infty$.

Por lo tanto concluimos que, $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$. ■

2.2. Ejemplos

El siguiente ejemplo establece que bajo las f-medidas exteriores podemos tener que la medida exterior de $\mathbb{R}$ bajo la existencia de una selección de dos puntos f es 0.

Ejemplo 2.8 Existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(\mathbb{R}) = 0$.

Demostración. Definamos al siguiente conjunto $S = \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, y consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora definamos a la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y \in S, \\ \\ f_E(\{x,y\}) & \text{si } x = \frac{1}{n+1} \text{ y } y = \frac{1}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ \\ x & \text{si } x \in S \text{ y } y = \frac{1}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ \\ f_E(\{x,y\}) & \text{si } x \in S \text{ y } y \in S. \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que $S \subseteq \left(0, \frac{1}{n}\right]_f$. Entonces

$$\lambda_f(\mathbb{R}) = \lambda_f(S) + \lambda_f\left(\left\{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0.$$

■

A continuación demostraremos que existe una selección de dos puntos tal que para un conjunto de tamaño $\mathfrak{c}$, su f-medida exterior es $+\infty$.

Ejemplo 2.9 Si $A \in [\mathbb{R}]^c$, entonces existe una selección de dos puntos f sin f-minimal tal que $\lambda_f(A) = +\infty$.

Demostración. Enumeremos a todas las sucesiones de $\mathbb{R}$ como $\{S_\epsilon : \epsilon < c\}$ y cada S_ϵ como $\{x_n^\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora vamos a definir a la selección de dos puntos f por inducción transfinita. Tomemos $r_0 \in A\backslash S_0$ y definamos $r_0 <_f x_n^0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $\theta < c$ y supongamos que para cada $\epsilon < \theta$ hemos elegido un número real $r_\epsilon \in \mathbb{R}$ para cada ϵ y fijemos $r_\theta \in A\backslash\left[\bigcup_{\epsilon\leq\theta} S_\epsilon \cup \{r_\epsilon : \epsilon < \theta\}\right]$ y definamos $r_\theta <_f x_n^\epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $\epsilon \leq \theta$ y $r_\theta <_f r\epsilon$ para cada $\epsilon < \theta$. Y para los demás conjuntos faltantes definamos el orden Euclideano.
Sea $\{(a_n, b_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de f-intervalos semiabiertos. Supongamos que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]_f$. Luego existe $\theta < c$ tal que $x_n^\theta = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por construcción tenemos que $r_\theta <_f x_n^\theta = a_n$, entonces $r_\theta \in A\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]_f$, lo cual es una contradicción. Así concluimos que, $\lambda_f(A) = +\infty$. ■

A continuación mencionaremos un par de teoremas relevantes con las f-medidas exteriores para familias de diversos tamaños.

Ejemplo 2.10 Sea $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ ajenos entre sí y, $0 < r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Demostración. Consideremos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $\quad a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}\backslash\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} A_\alpha \cup \{a_\epsilon, b_\epsilon : \epsilon < \alpha\}$ y $r_\alpha = b_\alpha - a_\alpha > 0$. Primero definamos para cada $t \in A$ y para cada $\alpha < \mathfrak{c}$

$$a_\alpha \leq_f t \leq_f b_\alpha.$$

Ahora sea $R = \{S \in \mathbb{R}^\omega : S = (x_{\alpha,j})_{j\in\mathbb{N}}$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo y para todo $n \in \mathbb{N}$ $(x_{\alpha,2j} \neq x_{\alpha,2j+1})$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo$\} = \{S_\epsilon : \epsilon < \mathfrak{c}\}$ y cada S_ϵ como $(x_{\alpha,j}^\epsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo. Supongamos que la selección de dos puntos f y el número $t_\epsilon^\alpha \in A_\alpha$ para cada $\epsilon < \theta < \mathfrak{c}$ se han definido de manera conveniente. Consideremos la sucesión S_θ fijemos $t^\alpha_\theta \in A_\alpha \setminus [\{t^\alpha_\epsilon : \epsilon < \theta\} \cup \bigcup_{\epsilon<\theta} S_\epsilon]$. Definamos la selección de dos puntos f en el punto t^α_θ con respecto a $x^\epsilon_{\alpha,j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo, como sigue:

- Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t^\alpha_\theta = x^\epsilon_{\alpha,2j}$ para algún $\epsilon < \theta$ definamos $x^\epsilon_{\alpha,2j+1} <_f t^\alpha_\theta$.

- Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t^\alpha_\theta = x^\epsilon_{\alpha,2j+1}$ para algún $\epsilon < \theta$ definamos $t^\alpha_\theta <_f x^\epsilon_{\alpha,2j}$.

- Para cada $j \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{j+1} <_f \frac{1}{j}$.

La selección de dos puntos f matendra el orden Euclideano donde no ha sido definida. Por definición tenemos que $A_\alpha \subseteq (a_\alpha, b_\alpha]_f$ y por ello obtenemos que $\lambda_f(A_\alpha) \leq b_\alpha - a_\alpha = r_\alpha$.

Supongamos que $A_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty}(a_{\alpha,j}, b_{\alpha,j}]_f$. Sea $\theta < \mathfrak{c}$ de tal forma que la sucesión $S_\theta = (x^\theta_{\alpha,2j})_{j\in\mathbb{N}}$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo, cumpla que $a_\alpha = x^\theta_{\alpha,2j}$ y $b_\alpha = x^\theta_{\alpha,2j+1}$ con $j, n \in \mathbb{N}$ y n-fijo. Por definición de la selección de dos puntos f se cumple lo siguiente:

- $r_\theta \notin (x^\theta_{\alpha,2j}, x^\theta_{\alpha,2j+1}]_f$ si $x^\alpha_{\alpha,2j} \neq a_\alpha$ y $x^\theta_{\alpha,2j+1} \neq b_\alpha$.
- $r_\theta \notin (x^\alpha_{\alpha,2j}, b_\alpha]_f$ si $x^\theta_{\alpha,2j} \neq a_\alpha$.
- $r_\theta \notin (a_\alpha, x^\theta_{\alpha,2j+1}]_f$ si $x^\theta_{\alpha,2j+1} \neq b_\alpha$,

lo cual implica que $r_\theta \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty}(x^\theta_{\alpha,2j}, x^\theta_{\alpha,2j+1}]_f$ si $x^\theta_{\alpha,2j} \neq a_\alpha$ y $x^\theta_{\alpha,2j+1} \neq b_\alpha$ para cada $j, n \in \mathbb{N}$ con n-fijo. Por lo tanto la única posible cubierta por f-intervalos de A_α debe contener a $(a_\alpha, b_\alpha]_f$. Así concluimos que $\lambda_f(A_\alpha) = b_\alpha - a_\alpha = r_\alpha$. ■

Ejemplo 2.11 Sean $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ tales que $\mid A_\alpha \cap A_\beta \mid \leq \omega$ para todo $\alpha < \beta < \omega_1$ y, $0 < r_\alpha \in \mathbb{R}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ la familia tal que cumple la hipótesis y consideremos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha \cup \{a_\epsilon, b_\epsilon : \epsilon < \alpha\}$ y $r_\alpha = b_\alpha - a_\alpha > 0$. Definamos a la familia $\{A'_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como sigue:

$$A'_0 = A_0\,,\ A'_1 = A_1\setminus(A_0)\,,\ A'_2 = A_2\setminus(A_0 \cup A_1)\,,\ \ldots\,,\ A'_\alpha = A_\alpha\setminus\Big(\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\Big).$$

Esta claro que los elementos de $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ son ajenos entre sí. Ahora sea la selección de dos puntos f como en el teorema anterior, entonces tenemos que $\lambda_f(A'_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Y puesto que $A_\alpha = A'_\alpha \cup (\bigcup_{\xi<\alpha} A_\alpha \cap A_\xi)$ y $\mid A_\alpha \cap A_\xi \mid \leq \omega$ concluimos que $\lambda_f(A_\alpha) = \lambda_f(A'_\alpha)$. Es decir $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$. ■

Ahora nos cuestionamos acerca de la siguiente pregunta.

Pregunta 2.12 Para toda selección de dos puntos f se cumple que ¿$\lambda_f(E) = \lambda_{\widehat{f}}(E)$?, donde $\widehat{f}$ es la selección de dos puntos opuesta de f.

Para responder la pregunta anterior tenemos los siguientes dos ejemplos cada uno con su respectivo caso deductivo.

Ejemplo 2.13 Consideremos $a \in \mathbb{R}$ y supongamos que a es un f-minimal para nuestra selección dada. Entonces por el corolario 2.6 obtenemos que $\lambda_f(\{a\}) = +\infty$ y, ahora si suponemos que a es un f-maximal y dada la definición 1.9 se tiene que $\lambda_{\widehat{f}}(\{a\}) = 0$.

Ejemplo 2.14 Definamos a nuestra selección de dos puntos como sigue:

$$f(\{r, s\}) = \begin{cases} r & \text{si } r < 1 \text{ y } s \in (1, +\infty), \\ \\ s & \text{si } 0 < r \text{ y } s \in (+\infty, 0], \\ \\ r & \text{si } x < y \text{ de otra forma.} \end{cases}$$

Entonces por la definición de nuestra selección de dos puntos opuesta $\widehat{f}$ obtenemos que $[0, 1)_{\widehat{f}} = \{0\}$ y su medida exterior inducida bajo nuestra selección definida es $\lambda_f([0, 1)_{\widehat{f}}) = 0$ pero por otro lado por la definición usual de nuestra selección de dos puntos f obtenemos que $\lambda_f([0, 1)_f) = +\infty$.

Capítulo 3

Conjuntos Borelianos de topologías provenientes de selecciones de dos puntos sobre $\mathbb{R}$

En este capítulo presentaremos varíos resultados recientes publicados en el artículo [9], en el cual se estudian las σ-álgebras de Borel de topologías provenientes de selecciones de dos puntos definidas en $\mathbb{R}$, cada una denotada por $\mathbb{B}_f(\mathbb{R})$. Probaremos que la suposición $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ implica la existencia de una familia $\{f_\nu : \nu < 2^\mathfrak{c}\}$ de selecciones de dos puntos en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_{f_\mu}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_{f_\nu}(\mathbb{R})$ para distintos $\mu, \nu < 2^\mathfrak{c}$. Suponiendo que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{c}$ es regular, también demostramos que existen $2^{2^\mathfrak{c}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ que contienen $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y ninguna de ellas es la σ-álgebra de Borel de τ_f para cualquier selección de dos puntos $f : [\mathbb{R}]^2 \to \mathbb{R}$. De igual manera damos varios ejemplos para ilustrar las propiedades de estas σ-álgebras de Borel.

3.1. σ-Álgebras de Borel de τ_f

En está sección presentamos la respuesta a la Pregunta 1 y también la Pregunta 2 será respondida, dando como afirmativas bajo la suposición de que el número cardinal $\mathfrak{c}$ sea igual a $2^{<\mathfrak{c}}$ y además para la Pregunta 2 supondremos que $\mathfrak{c}$ será un cardinal regular. Para ello, primero damos la notación principal de este capítulo, referente a la σ-álgebra de Borel generada por la topología τ_f.

Definición 3.1 Dada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$, la σ-álgebra de Borel generada por la topología τ_f en $\mathbb{R}$, será denotada por $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ ó bien $\mathcal{B}(\tau_f)$, y usaremos la notación $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ para la σ-álgebra de Borel generada por la topología Euclidiana τ_E en $\mathbb{R}$.

Ahora recordemos que cada selección de dos puntos $f : [\mathbb{R}]^2 \to \mathbb{R}$ tiene una selección de dos puntos opuesta $\widehat{f}$ (ver Definición 1.9), a continuación veremos que la σ-álgebra de Borel generada por la topología $\tau_{\widehat{f}}$ coincide con la σ-álgebra de Borel generada por la topologia τ_f, para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.2 Para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$, tenemos que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\widehat{f}}(\mathbb{R})$, donde $\widehat{f}$ es la selección de dos puntos opuesta de f.

Demostración. Basta probar que se cumple $\mathcal{B}_{\widehat{f}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ pues la contención $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}_{\widehat{f}}(\mathbb{R})$ siempre es cierta ya que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\widehat{\widehat{f}}}(\mathbb{R})$. Tomemos $A, B \in [X]^{<\omega} \backslash \{\emptyset\}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y consideremos el abierto básico $[A, B]_{\widehat{f}} \in \tau_{\widehat{f}}$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } p \in [A, B]_{\widehat{f}} &\iff a <_{\widehat{f}} p <_{\widehat{f}} b \text{ para cada } a \in A, \text{ para cada } b \in B, \\ &\iff p <_f a \text{ y } b <_f p \text{ para cada } a \in A \text{ y para cada } b \in B, \\ &\iff b <_f p <_f a \text{ para cada } a \in A \text{ y para cada } b \in B, \\ &\iff p \in [B, A]_f. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_{\widehat{f}} \subseteq \tau_f$, y así concluimos que $\mathcal{B}_{\widehat{f}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$. ■

A continuación damos el siguiente teorema junto con su corolario los cuales son resultados que se dan gracias a la propiedad de la topología τ_f al ser Tychonoff (Teorema 1.30) en donde podemos apreciar su relevancia dentro de la σ-álgebra $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ y además serán fundamentales para dar pruebas de posteriores resultados en está tesis.

Teorema 3.3 Para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $\{r\} \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$.

Demostración. Tenemos que la topología τ_f es Tychonoff por lo tanto por equivalencias de está propiedad tenemos que para todo $r \in \mathbb{R}$, $\{r\}$ es cerrado. ■

Corolario 3.4 Para cada selección de dos puntos f se cumple lo siguiente:

1) $[\mathbb{R}]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$.

2) Para cada $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \setminus U \in [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ entonces $U \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$.

Demostración. Por el Teorema 3.3 y por ser $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ una σ-álgebra tenemos la prueba de este corolario. ■

Observación 3.5 Por los anteriores resultados tenemos como una observación clara que la σ-álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de los conjuntos numerables y conumerables cumple que $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

El siguiente resultado nos ayudará a evitar los puntos f-minimales y los puntos f-máximales de una selección de dos puntos f, para estudiar las σ-álgebras de Borel generadas por la topología τ_f.

Lema 3.6 Para cada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ existe $g \in Sel_2(\mathbb{R})$ sin ningún punto g-minimal ni un punto g-maximal tal que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_g(\mathbb{R})$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \in \mathbb{R}$ es un punto f-minimal y $q \in \mathbb{R}$ es un punto f-maximal. Tomemos un subconjunto infinito $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R} \setminus \{p, q\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

i) $r_{2n} <_g r$ para cada $r \in \mathbb{R} \setminus (\{r_m : m \in \mathbb{N}\}$,

ii) $r <_g r_{2n+1}$ para cada $r \in \mathbb{R} \setminus (\{r_m : m \in \mathbb{N}\}$, *iii)* $r_{2n+2} <_g r_{2n}$ y

iv) $r_{2n+1} <_g r_{2n+3}$.

Para otros pares de puntos que aún no se han considerado, g se define como f. Observemos que g no tiene ni un punto g-minimal ni un punto g-maximal. Recordemos que $\{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = \omega$ y $|\mathbb{R} \setminus A| = \omega\}$ esta contenido en $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}_g(\mathbb{R})$. Escribamos $P := \{r_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $Q := \{r_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora, fijemos $A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$ y definamos $A_1 := A \cap Q$ y $A_2 := A \setminus A_1$ y $B_1 := B \cap P$ y $B_2 := B \setminus B_1$. Entonces tenemos que:

1. $(A, B)_f \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\} = ((A \setminus A_1) \cup B_1, (B \setminus B_1) \cup A_1)_g \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$,
2. $[p, b)_f \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(r_{2n}, b)_g$ para cada $b \in \mathbb{R} \setminus (\{r_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{p\})$, y
3. $(a, q]_f \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a, r_{2n+1})_g$ para cada $a \in \mathbb{R} \setminus (\{r_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{q\})$.

Por lo tanto, deducimos que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_g(\mathbb{R})$. ■

Con base en el Lema 3.6, podemos asumir que todas nuestras selecciones de dos puntos no tienen ni un punto minimal ni un punto maximal.

Ahora bien, recordemos que en el Ejemplo 1.27 definimos a $f_d \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{B}_{f_d}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, en base a esto podemos ver que existe una variedad de σ -álgebras de la forma $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ por pares disjuntos.

El siguiente resultado aparece como ejercicio en varios libros de Teoría de la Medida.

Lema 3.7 Sea X un conjunto infinito y $Y \subseteq X$ un subconjunto infinito. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces

$$< \mathcal{A} > \cap Y =< \mathcal{A} \cap Y >,$$

donde el símbolo en la derecha denota la σ-álgebra en Y generada por $\mathcal{A} \cap Y$.

Teorema 3.8 Sea $\{X_\mu : \mu < \mathfrak{c}\}$ una partición de $\mathbb{R}$ en subconjuntos infinitos y supongamos que $f_\mu \in Sel_2(X_\mu)$, para cada $\mu < \mathfrak{c}$. Entonces $\oplus_{\mu<\kappa} f_\mu$ cumple que

$$\mathcal{B}_{f\mu}(X_\mu) = \mathcal{B}_{\oplus_{\mu<\mathfrak{c}} f_\mu}(\mathbb{R}) \cap X_\mu,$$

para cada $\mu < \mathfrak{c}$.

Demostración. Definamos $f := \oplus_{\nu<\mathfrak{c}} f_\nu$ y fijemos $\nu < \mathfrak{c}$. Para cada $r \in \mathbb{R}$ por la Definición 1.18 sabemos que:

- $(r, \rightarrow)_{f_\mu} = (r, \rightarrow)_f \cap X_\mu$ si $r \in X\mu$;
- $(\leftarrow, r)_{f_\mu} = (\leftarrow, r)_f \cap X_\mu$ si $r \in X_\mu$; y
- $(r, s)_{f_\mu} = (r, s)_f$ si $r, s \in X_\mu$.

Por lo tanto, deducimos que X_μ es cerrado en la topología τ_f y así $\tau_f \cap X_\mu = \tau_{f\mu} \subseteq \tau_f$. Por el Lema 3.7, tenemos que

$$\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) \cap X_\mu =< \tau_f > \cap X_\mu =< \tau_f \cap X_\mu >=< \tau_{f_\mu} >= \mathcal{B}_{f_\mu}(X_\mu).$$

■

Notación 3.9 Para cada $X \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$, sea $f_d^X \in Sel_2(X)$ la selección de dos puntos definida en el Ejemplo 1.27 tal que $\tau_{f_d^X}$ es la topología discreta en X, y sea $f_E^X := f_E \restriction_{[X]^2}$; es decir, f_E^X es la selección de dos puntos Euclidiana en X como un subespacio de $\mathbb{R}$.

A continuación respondemos a la Pregunta 1 positivamente:

Teorema 3.10 Existe una familia $\{f_\alpha : \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de selecciones de dos puntos en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_{f_\alpha}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_{f_\beta}(\mathbb{R})$ para distintos $\alpha, \beta < 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración. Sea $\{X_\mu : \mu < \mathfrak{c}\}$ una partición de $\mathbb{R}$ en subconjuntos densos de $\mathbb{R}$. Para cada $\mu < \mathfrak{c}$ consideremos la selección de dos puntos $f_d^{X_\mu}$ y $f_E^{X_\mu}$. Para cada $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{c}$, definamos $f_d^A = (\oplus_{\mu \in A} f_E^{X_\mu}) \oplus (\oplus_{\nu \in \mathfrak{c} \setminus A} f_E^{X_\nu})$. Ahora, si $A, B \in \mathcal{P}(c) \setminus \{\emptyset\}$ y $\mu \in A \setminus B$, entonces $\mathcal{P}(X_\mu) \subseteq \mathcal{B}_{f_d^B}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(X_\mu) \nsubseteq \mathcal{B}_{f_d^A}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, la familia requerida es $\{f_d^A : A \in \mathcal{P}(\mathfrak{c}) \setminus \{\emptyset\}\}$. ■

Enseguida probaremos que la σ-álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ no es la σ-álgebra de Borel de una topología τ_f para cualquier $f \in Sel_2(\mathbb{R})$. Pero antes, probaremos el siguiente lema general.

Lema 3.11 Sea (X, τ) un espacio donde X es un conjunto no numerable. Si $\tau \subseteq \mathcal{C}(X)$, entonces tenemos que cada subconjunto discreto de X es numerable.

Demostración. Supongamos que $D := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un subconjunto discreto de X. Entonces para cada $\alpha < \omega_1$ escogamos un subconjunto abierto V_α tal que $D \cap V_\alpha = \{x_\alpha\}$. Por lo tanto, tenemos que el conjunto abierto $\bigcup\{V_\alpha : \alpha < \omega_1$ y α es par $\}$ no puede estar en $\mathcal{C}(X)$. ■

Recordemos por la Observación 3.5 que la σ-álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = \omega$ o $|\mathbb{R} \setminus A| = \omega\}$ esta contenida en $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ para toda $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.12 La σ-álgebra de los numerables conumerables $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es diferente de cualquier σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$ con $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Fijemos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$. Supongamos que sucede $|(\leftarrow, r)_f| \leq \omega$ ó que $|(r, \rightarrow)_f| \leq \omega$ para cada $r \in \mathbb{R}$. Definamos $L := \{r \in \mathbb{R} : |(\leftarrow, r)_f| \leq \omega\}$ y $R := \{r \in \mathbb{R} : |(r, \rightarrow)_f| \leq \omega\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|L| = \mathfrak{c}$. Ahora, fijemos cualquier $r_0 \in L$ y supogamos que tenemos definido $r_\alpha \in L$ para cada $\alpha < \gamma < \omega_1$ asi que $\alpha < \beta < \omega_1$ si y sólo si $r_\alpha <_f r_\beta$, para $\alpha, \beta < \gamma$. Como $|\bigcup_{\alpha<\gamma}(\leftarrow, r_\alpha)_f| \leq \omega$, podemos escoger $r_\gamma \in L \setminus (\bigcup_{\alpha<\gamma}(\leftarrow, r_\alpha])$. Asi $r_\alpha <_f r_\gamma$ para cada $\alpha < \gamma$. Ahora, consideremos el conjunto $D = \{r_{\alpha+1} : \alpha < \omega_1\}$. Como $D \cap (r_\alpha, r_{\alpha+2})_f = \{r_{\alpha+1}\}$, así obtenemos que D es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$ bajo la topología τ_f, pero esto contradice al Lema 3.11. ■

Para responder a la Pregunta 2 notemos que con el Teorema 3.12, sabemos que existe una σ-álgebra que es diferente de cualquier σ-álgebra de Borel proveniente de una selección, sin embargo suponiendo otros enunciados de teoria de conjuntos, tendremos que el Corolario 3.15 nos dirá que podemos encontrar muchas σ-álgebras que no son de esta forma, dando una respuesta afirmativa a dicha pregunta.

El siguiente lema es un resultado que se tiene referente a la σ-álgebra generada por una familia de subconjuntos de un conjunto dado.

Lema 3.13 Sea X un conjunto infinito y $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces para cada $B \in \langle \mathcal{A} \rangle$ existe $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

(1) $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ó

(2) $X \setminus B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Demostración. Fijemos $B \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y pongamos $\langle \mathcal{A} \rangle = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$. Es claro que si $B \in \mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cup \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces pasa (1) ó (2). Fijemos $\alpha < \omega_1$ y supongamos que si $\beta < \alpha$, entonces (1) ó (2) se mantiene para cada elemento de $\mathcal{A}_\beta$. Supongamos que $B \in \mathcal{A}_\alpha$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\beta_n < \alpha$, $B_n \in \mathcal{A}_{\beta_n}$ y $\{A^n_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tales que B es determinado por los conjuntos $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y

1. $B_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^n_m$ ó
2. $X \setminus B_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^n_m$.

Ahora, sea $I := \{n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^n_m\}$ y $J := \{n \in \mathbb{N} : X \setminus B_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^n_m\}$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso I. El ordinal α es par. En este caso, por la Proposición 1.54 tenemos que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Si $J = \emptyset$, entonces hemos terminado. Supongamos que $J \neq \emptyset$. Entonces, $X \setminus B \subseteq X \setminus B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ para cada $n \in J$. Por lo tanto, la condición (2) se mantiene.

Caso II. El ordinal α es impar. Entonces, por la Proposición 1.54 se tiene que $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Si $I \neq \emptyset$, entonces (1) se mantiene. Supongamos que $J = \mathbb{N}$. Entonces, $X \setminus B = X \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^n_m\right)$. Asi, la condición (2) se mantiene. ■

El siguiente teorema nos permite responder de manera afirmativa a la Pregunta 2.

Teorema 3.14 Supongamos que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{c}$ es regular. Entonces existen $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ que contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y son disjuntas por pares.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular. Por el Lema 1.4, podemos fijar una familia $\mathfrak{c}$-casi disjunta $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}$ con $|\mathcal{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Enumeremos $\mathcal{A}$ como $\{A_\nu : \nu < 2^{\mathfrak{c}}\}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq 2^{\mathfrak{c}} : |2^{\mathfrak{c}} \setminus D| = |D| = 2^{\mathfrak{c}}\}.$$

Por el Lema 1.6 tenemos que $|\mathcal{D}| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$. Para cada $D \in \mathcal{D}$, definamos $\mathcal{S}_D := \langle \{A_\nu : \nu \in D\} \cup [\mathbb{R}]^{\leq\omega} \rangle$. Observemos que $\{A_\nu : \nu \in D\} \subseteq \mathcal{S}_D$ para cada $D \in \mathcal{D}$. Ahora, fijemos $E, D \in \mathcal{D}$ y supongamos que existe $\mu \in E \setminus D$. De acuerdo al Lema 3.13, existen dos conjuntos disjuntos I y J de $\mathbb{N}$, $\{A_{\nu_n} : n \in I\} \subseteq \{A_\nu : \nu \in D\}$ y $\{F_n : n \in J\} \subseteq [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ tales que

(1) $A_\mu \subseteq \left(\bigcup_{n\in I} A_{\nu_n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in J} F_n\right)$ ó

(2) $\mathbb{R} \setminus A_\mu \subseteq \left(\bigcup_{n\in I} A_{\nu_n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in J} F_n\right)$.

Como $|A_\mu \cap A_\nu| < \mathfrak{c}$ para cada $\nu \in D$, la cláusula (1) es imposible. Por lo tanto, debemos tener que $\mathbb{R} \setminus A_\mu \subseteq \left(\bigcup_{n\in I} A_{\nu_n}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in J} F_n\right)$. Así, $\left(\bigcap_{n\in I} \mathbb{R} \setminus A_{\nu_n}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in J} \mathbb{R} \setminus F_n\right) \subseteq A_\mu$. Ahora, escogamos cualquier $\gamma \in 2^{\mathfrak{c}} \setminus \left(\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu\}\right)$. Sabemos que $|A_\gamma \cap \left(\bigcup_{n\in I} A_{\nu_n}\right)| < \mathfrak{c}$ y por lo tanto $|A_\gamma \cap \left(\bigcap_{n\in I} \mathbb{R} \setminus A_{\nu_n}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in J} \mathbb{R} \setminus F_n\right)| = \mathfrak{c}$ lo cual también es imposible. Así, obtenemos que $A_\mu \in \mathcal{S}_E \setminus \mathcal{S}_D$. Por lo tanto, $\{\mathcal{S}_D : D \in \mathcal{D}\}$ es una familia de σ-álgebras en $\mathbb{R}$ que contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y son disjuntas por pares. ■

Corolario 3.15 Supongamos que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{c}$ es regular. Entonces existen $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ que contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y ninguna de ellas es la σ-álgebra de Borel de τ_f para cualquier $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{c} = 2^{<\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular. Luego, por el Teorema 3.14, existen $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ que contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y son disjuntas por pares. Observemos por otra parte que el número máximo de σ-álgebras de Borel provenientes de selecciones de dos puntos es $2^{\mathfrak{c}}$, por tanto si quitamos todas estas posibles, obtendriamos que son al menos $2^{2^{\mathfrak{c}}}$, así que existen al menos $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras de Borel que no son inducidas por selecciones de dos puntos. ■

3.2. Algunas propiedades de las σ-álgebras $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$

A continuación veremos una diversidad de propiedades de las σ-álgebras de Borel de topologías generadas mediante las selecciones de dos puntos, además daremos algunos ejemplos que atestiguan la gran variedad de σ-álgebras de Borel que se pueden definir mediante una selección de dos puntos en $\mathbb{R}$.

Sabemos que los subconjuntos de un punto de $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados, no abiertos y G_δ en la topología Euclidiana. En el Ejemplo 1.27 donde τ_{f_d} es la topología discreta, los conjuntos de un punto son trivialmente abiertos. En los siguientes resultados, demostramos como podemos manipular las selecciones de dos puntos para obtener propiedades predeterminadas de algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Recordemos que en la topología Euclideana los conjuntos abiertos no vacios tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$ esto nos motiva a formular el siguiente teorema.

Teorema 3.16 Si $U \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $|\mathbb{R} \setminus U| = \mathfrak{c}$, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $Int_f(U) = \emptyset$. En particular, si $U \neq \emptyset$, entonces $U \notin \tau_f$.

Demostración. Enumeremos $\{(A,B) : A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \ \text{ y } \ A \cap B = \emptyset\}$ como $\{(A_\nu, B_\nu) : \nu < \mathfrak{c}\}$, y tomemos a la sucesión decreciente numerable $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ d_n converge a $-\infty$ y a la sucesión creciente numerable $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e_n converge a $+\infty$. Ahora, consideremos un subconjunto $\{c_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ de $\mathbb{R}$ de manera que

$$c_\nu \notin \left(\left(\bigcup_{\mu\leq\nu} A_\mu\right) \cup \left(\bigcup_{\mu\leq\nu} B_\mu\right)\right) \cup U \cup D \cup E,$$

para cada $\nu < \mathfrak{c}$. A continuación definiremos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

Para cada $\nu < \mathfrak{c}$ establecemos $a <_f c_\nu <_f b$ para cada $a \in A_\nu$ y $b \in B_\nu$, y f se define como el orden Euclidiano en los pares restantes de números reales. Observemos que por la forma en como construimos a $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ esta no tiene ni un punto f-maximal ni un punto f-minimal, ya que $c_\xi \notin (D \cup E)$.

Ahora, tenemos que $c_\nu \in (A_\nu, B_\nu)$ para todo $\nu < \mathfrak{c}$. Si $r \in Int_f(U) = \emptyset$, entonces existe $\mu < \mathfrak{c}$ tal que $r \in (A_\mu, B_\mu) \subseteq U$, pero esto es una contradicción ya que $c_\mu \notin U$. ■

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 3.16 suponiendo la Hipótesis del Continuo.

Corolario 3.17 [CH]. Si $\emptyset \neq U \subseteq$ y $\mathbb{R} \setminus U \subseteq \mathbb{R}$ es no numerable, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $U \notin \tau_f$.

No sabemos si es posible o no eliminar la Hipótesis del Continuo del corolario anterior.

A continuación damos resultados en donde podemos apreciar cuando un subconjunto de los números reales no es ni cerrado ni abierto en la topología τ_f para alguna $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Teorema 3.18 Si $C \subseteq \mathbb{R}$ es infinito y $C \neq \mathbb{R}$, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $C \notin \mathcal{C}_f$.

Demostración. Enumeremos un subconjunto infinito $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ de C y fijemos $r \in \mathbb{R} \setminus C$. Entonces definamos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ de la siguiente manera $r - \frac{1}{n} <_f c_n <_f r + \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y f se define como el orden Euclidiano en los pares restantes de números reales. Notemos que f no tiene un punto f-maximal ni un punto f-minimal. Entonces, tenemos que $r \in cl_{\tau_f}(C) \setminus C$ y asi $C \notin \mathcal{C}_f$. ■

Teorema 3.19 Si $C \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $\omega \leq |C|$ y $|\mathbb{R} \setminus C| = \mathfrak{c}$, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $C \notin \tau_f \cup \mathcal{C}_f$.

Demostración. Enumeremos al conjunto $\{(A, B) : A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \text{ y } A \cap B = \emptyset\}$ como $\{(A_\xi, B_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$ y enumeremos un subconjunto infinito $\mathcal{L} = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ de C.

Ahora tomemos $d \in \mathbb{R} \setminus C$ y consideremos un subconjunto $\{r_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathbb{R}$ de manera que $r_\xi \notin \Big((\bigcup_{\nu \leq \xi} A_\nu) \cup (\bigcup_{\nu \leq \xi} B_\nu)\Big) \cup C \cup \mathcal{L} \cup \{d\}$, para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

Definamos a la selección de dos puntos f como sigue:

- Primero definamos
$$d - \frac{1}{n} <_f l_n <_f d + \frac{1}{n}$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Para cada $\xi < \mathfrak{c}$ definimos
$$a <_f r_\xi <_f b$$
para cada $a \in A_\xi$ y $b \in B_\xi$.

- $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ se define como el orden Euclideano en los pares restantes de números reales.

Podemos definir la selección de dos puntos f como en el Teorema de tal manera que no tenga ningún punto f-minimal ni un punto f-maximal.

Entonces por la definición de $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tenemos las siguientes declaraciones:

• $d \in cl_{\tau_f}(C) \setminus C$ entonces $C \notin \mathcal{C}_f$.

$r_\xi \in (A_\xi, B_\xi)$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$. Si tomamos $r \in Int_f(C) = \emptyset$, entonces existe $\nu < \mathfrak{c}$ tal que $r \in (A_\nu, B_\nu) \subseteq C$ lo cual sería una contradicción dado que tenemos que $r_\xi \notin C$. ■

Recordemos que en un espacio topologico un conjunto G_δ es una intersección numerable de conjuntos abiertos. A continuación, damos un ejemplo de una selección de dos puntos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ para la cual ningún conjunto de un solo punto en $\mathbb{R}$ es un conjunto G_δ en la topología τ_f.

Ejemplo 3.20 Existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $\{r\}$ no es un conjunto G_δ en la topología τ_f para cada $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Dividamos a los números reales como $\mathbb{R} = X \cup Y$ donde $X \cap Y = \emptyset$ y $|X| = |Y| = \mathfrak{c}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{(A, B) : A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \text{ y } A \cap B = \emptyset\}$. Enumeremos todas las sucesiones de $\mathcal{A}$ como sigue:

$$\{\{(A^n_\nu, B^n_\nu) : n \in \mathbb{N}\} : \nu < \mathfrak{c} \text{ y } \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu\big) \cap \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu\big) = \emptyset\}.$$

Definamos inductivamente dos subconjuntos, el primero $\{r_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ dentro de X y el segundo $\{s_\nu : \nu < \mathfrak{c}\}$ dentro de Y tales que

$$s_\nu \notin \big(\bigcup_{\mu\leq\nu} \big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\mu\big) \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\mu\big)\big)\big) \cup \{s_\mu : \mu < \nu\} \cup \{r_\mu : \mu < \nu\} \text{ y}$$

$$r_\nu \notin \big(\bigcup_{\mu\leq\nu} \big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\mu\big) \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\mu\big)\big)\big) \cup \{s_\mu : \mu < \nu\} \cup \{r_\mu : \mu < \nu\}$$

para cada $\nu < \mathfrak{c}$. Ahora, definamos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ de manera inductiva como sigue:

Tomemos a $r_0, s_0 \in \mathbb{R}$ y definamos

$$a <_f r_0 <_f b \text{ y } a <_f s_0 <_f b$$

para cada $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_0$ y para cada $b \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_0$.

Supongamos que para un ordinal $\mu < \nu < \mathfrak{c}$ los números distintos r_μ, s_μ han sido definidos. Como la cardinalidad del conjunto

$$\mathbb{R} \setminus \big(\bigcup_{\mu<\nu} \big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\mu\big) \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\mu\big)\big)\big) \cup \{r_\mu : \mu < \nu\} \cup \{s_\mu : \mu < \nu\}$$

es $< \mathfrak{c}$, podemos tomar r_ν, s_ν en éste conjunto y definamos

$$a <_f r_\nu <_f b \text{ y } a <_f s_\nu <_f b$$

para cada $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu$ y para cada $b \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu$, para cada $\nu < \mathfrak{c}$. La selección de dos puntos f mantendrá el orden Euclideano en los pares de puntos en donde no ha sido definida .

Supongamos que $G \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\emptyset\}$ es un conjunto G_δ en la topología τ_f. Supongamos que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A^n, B^n) \subseteq G$ donde $A^n, B^n \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n\right) = \emptyset$. Escogamos $\nu < \mathfrak{c}$ de modo que $A^n = A^n_\nu$ y $B^n = B^n_\nu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $r_\nu, s_\nu \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A^n_\nu, B^n_\nu)_f$, tenemos que $r_\nu, s_\nu \in G$. Por lo tanto G no puede consistir de un solo punto. ∎

Comentario 3.21 En la enumeración $\{\{(A^n_\nu, B^n_\nu) : n \in \mathbb{N}\} : \nu < \mathfrak{c} \text{ y } \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu\right) = \emptyset\}$, dada en el ejemplo anterior, notemos que es necesario que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu\right)$ sean disjuntos, ya que de lo contrario supongamos que $x, r \in \mathbb{R}$ son tales que $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu\right)$ y $r \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A^n, B^n)$ entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in A^n \cap B^m$ y $A^n < r < B^m$ de aqui que tengamos $x < r < x$ lo cual no puede ocurrir, por lo tanto $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n_\nu\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\nu\right) = \emptyset$.

Usando las construcciones del Ejemplo 3.20 y el Teorema 3.19 establecemos el siguiente resultado.

Teorema 3.22 Si $C \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $\omega \leq |C|$ y $|\mathbb{R} \setminus C| = \mathfrak{c}$, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $C \notin \mathcal{C}_f$ y C no es un conjunto G_δ en la topología τ_f.

Ahora veremos un ejemplo relevante contrario con el hecho de que todo intervalo Euclideano (a, b) es Lebesgue medible.

Ejemplo 3.23 Existe una selección de dos puntos f tal que $(0, 1)_f$ es no λ_f-medible.

Demostración. Nuestra selección de dos puntos f esta definida como sigue:

$$f(\{r,s\}) = \begin{cases} r & \text{si } r \in (3,4) \text{ y } s = 1, \\ 0 & \text{si } r \in (3,4) \text{ y } s = 0, \\ r & \text{si } r \in (2,3) \text{ y } s = 0, \\ -1 & \text{si } r \in (2,3) \text{ y } s = -1, \\ r & \text{si } r \in (2,4) \text{ y } s = 6, \\ 5 & \text{si } r \in (2,4) \text{ y } s = 5, \\ r & \text{si } x < y \text{ de otra forma.} \end{cases}$$

para cada $\{r, s\} \in [\mathbb{R}]^2$. Tenemos las siguientes propiedades:
• $(2, 4) = (2, 4)_f$, $(2, 3) = (2, 3)_f$ y $(3, 4) = (3, 4)_f$.
• $(0, 1)_f = (0, 1) \cup (3, 4)$ y $(-1, 0)_f = (-1, 0) \cup (2, 3)$.
• $(5, 6)_f = (5, 6) \cup (2, 4)$.
Por lo anterior, tenemos que $\lambda_f((2, 4)) = \lambda_f((2, 3)) = \lambda_f((3, 4)) = 1$. Ahora bien, si $E = (0, 1)_f$ y $A = (2, 4)_f$, entonces $E \cap A = [(0, 1) \cup (3, 4)] \cap (2, 4) = (3, 4) = (3, 4)_f$, y $E^c \cap A = [(-\infty, 0) \cup$

$[1,3] \cup [4,+\infty)] \cap (2,4) = (2,3) = (2,3)_f$. Entonces, $\lambda_f(E \cap A) = \lambda_f(E^c \cap A) = 1$. Por otro lado, tenemos $(2,4) \subseteq (5,6)_f$, esto implica que debemos tener $\lambda_f((2,4)_f) \leq 1$. Por consiguiente,

$$\lambda_f(E \cap A) + \lambda_f(E^c \cap A) = 2 > 1 = \lambda_f(A).$$

Así concluimos que, $(0,1)_f$ no puede ser λ_f-medible. ■

Como se demostró anteriormente la existencia de $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ para la cual $(0,1)_f \notin \mathcal{M}_f$; nos indica la conclusión de que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{M}_f$. Es bien sabido que existen subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ que no estan dentro de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En el siguiente teorema, veremos que para ciertos subconjutos C's de $\mathbb{R}$ podemos encontrar $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $C \in \mathcal{M}_f \setminus \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$. Para hacer esto, necesitaremos los siguientes lemas.

Definición 3.24 Dada una biyección $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotaremos por f_γ la selección de dos puntos en $\mathbb{R}$ definida por $r <_{f_\gamma} s$ si $\gamma(r) < \gamma(s)$ para cada $\{r,s\} \in [\mathbb{R}]^2$ (recordemos que $\leq$ es el orden Euclideano en $\mathbb{R}$). Observamos que f_γ no tiene ni un punto minimal ni un punto maximal.

Lema 3.25 Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección, entonces

- $(A,B)_{f_\gamma} = \gamma^{-1}\big((\gamma(A),\gamma(B))\big)$,
- $[A,B)_{f_\gamma} = \gamma^{-1}\big([\gamma(A),\gamma(B))\big)$,
- $(A,B]_{f_\gamma} = \gamma^{-1}\big((\gamma(A),\gamma(B)]\big)$ y
- $[A,B]_{f_\gamma} = \gamma^{-1}\big([\gamma(A),\gamma(B)]\big)$,

para cada $A,B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Solo probaremos la primera igualdad, la prueba de las demás igualdades es análoga. Fijemos $A,B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$.

$$x \in (A,B)_{f_\gamma} \text{ si y sólo si } a <_{f_\gamma} x <_{f_\gamma} b \ \text{ para todo } \ a \in A \ \text{ y } \ b \in B \text{ si y sólo si}$$

$$\gamma(a) < \gamma(x) < \gamma(b) \ \text{ para todo } \ a \in A \ \text{ y } \ b \in B \text{ si y sólo si } x \in \gamma^{-1}\big((\gamma(A),\gamma(B))\big).$$

■

Lema 3.26 Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección, entonces $\mathcal{B}_{f_\gamma}(\mathbb{R}) = \gamma^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$.

Demostración. Por el Lema 1.34 tenemos que $\gamma^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ es una σ-álgebra. Se sigue del Lema 3.25 que $\gamma^{-1}(\tau_E) = \tau_{f_\gamma}$ y como γ es una biyección, también se cumple que $\gamma^{-1}(\mathcal{C}_E) = \mathcal{C}_{f_\gamma}$. Por lo tanto, deducimos que $\mathcal{B}_{f_\gamma}(\mathbb{R}) = \gamma^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. ■

Lema 3.27 Si $C \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $|\mathbb{R} \setminus C| = \mathfrak{c}$, entonces existen $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ tales que $b_n - a_n \longrightarrow 0$ y $0 < b_n - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero, escribamos $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ donde $0 < b_n - a_n < \frac{1}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $|\mathbb{R} \setminus C| = \mathfrak{c}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|[a_m, b_m] \cap (\mathbb{R} \setminus C)| = \mathfrak{c}$. Dentro de este último conjunto podemos encontrar $a_{n_1}, b_{n_1} \notin C$ tales que $a_{n_1} < b_{n_1}$, $|[a_{n_1}, b_{n_1}] \cap (\mathbb{R} \setminus C)| = \mathfrak{c}$ y $[a_{n_1}, b_{n_1}] \subseteq [a_m, b_m]$. Definamos $A_1 := [a_{n_1}, b_{n_1}] \cap (\mathbb{R} \setminus C)$. Al continuar este procedimiento por inducción, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtenemos un intervalo cerrado $[a_{n_k}, b_{n_k}]$ y A_k tales que

- $a_{n_k}, b_{n_k} \notin C$;
- $0 < b_{n_k} - a_{n_k} < \frac{1}{2^k}$;
- $A_k := [a_{n_k}, b_{n_k}] \cap (\mathbb{R} \setminus C)$; y
- $|A_k| = \mathfrak{c}$.

Notemos que por lo anterior tenemos la conclusión de la prueba. ■

Teorema 3.28 Si $C \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $|C| = |\mathbb{R} \setminus C| = \mathfrak{c}$, entonces existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $C \in \mathcal{M}_f \setminus \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$.

Demostración. Usamos los conjuntos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ dados por el Lema 3.27 cuyos elementos satisfacen que $a_n, b_n \notin C$, $b_n - a_n \longrightarrow 0$ y $0 < b_n - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que existe $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (además, no es Lebesgue medible) tal que $|E| = \mathfrak{c}$ y $E \subseteq (-1, 2)$. (ver el libro [5, Th. 1.4.7, p. 32]). Fijemos una biyección $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

- $\gamma(a_n) = -1 - \frac{1}{n}$ y $\gamma(b_n) = 2 + \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- $\gamma(C) = E$; y
- $\gamma(\mathbb{R} \setminus \big(C \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}\big) = \mathbb{R} \setminus \big(E \cup \{-1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\big)$.

Se sigue del Lema 3.26 que $C \notin \gamma^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{B}_{f_\gamma}(\mathbb{R})$. Como $C \subseteq (a_n, b_n)_{f_\gamma}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, debemos tener que $\lambda_{f_\gamma}(C) = 0$, y por lo tanto obtenemos que $C \in \mathcal{N}_{f_\gamma} \subseteq \mathcal{M}_{f_\gamma}$. ■

A continuación generalizamos la técnica utilizada en la demostración del teorema anterior.

Definición 3.29 Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una biyección y $g \in Sel_2(\mathbb{R})$. Entonces, definamos $f_{g,\gamma} \in Sel_2(\mathbb{R})$ por $r <_{f_{g,\gamma}} s$ si $\gamma(r) <_g \gamma(s)$ para cada $\{r, s\} \in [\mathbb{R}]^2$.

Observemos que si g no tiene ni punto minimal ni punto maximal, entonces $f_{g,\gamma}$ tiene la misma propiedad. Dada la definición de $f_{g,\gamma} \in Sel_2(\mathbb{R})$, también es posible generalizar el Lema 3.25, la cual enunciamos a continuación.

Proposición 3.30 Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección y $g \in Sel_2(\mathbb{R})$, entonces

- $(A, B)_{f_{g,\gamma}} = \gamma^{-1}\big((\gamma(A), \gamma(B))_g\big)$,
- $[A, B)_{f_{g,\gamma}} = \gamma^{-1}\big([\gamma(A), \gamma(B)_g)\big)$,
- $(A, B]_{f_{g,\gamma}} = \gamma^{-1}\big((\gamma(A), \gamma(B)]_g\big)$ y
- $[A, B]_{f_{g,\gamma}} = \gamma^{-1}\big([\gamma(A), \gamma(B)]_g\big)$,

para cada $A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Fijemos $A, B \in [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ con $A \cap B = \emptyset$.

$$x \in (A, B)_{f_{g,\gamma}} \text{ si y sólo si } a <_{f_{g,\gamma}} x <_{f_{g,\gamma}} b \text{ para cada } a \in A \text{ y para cada } b \in B$$
$$\text{si y sólo si } \gamma(a) <_g \gamma(x) <_g \gamma(b) \text{ para cada } a \in A \text{ y para cada } b \in B$$
$$\text{si y sólo si } x \in \gamma^{-1}\big((\gamma(A), \gamma(B))_g\big).$$

La prueba de las demás igualdades es análoga. ■

Enseguida, damos la generalización del Lema 3.26, usando la definición de $f_{g,\gamma} \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Proposición 3.31 Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una biyección y $g \in Sel_2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{B}_{f_{g,\gamma}}(\mathbb{R}) = \gamma^{-1}\big(\mathcal{B}_g(\mathbb{R})\big)$.

Demostración. Por el Lema 1.34 sabemos que $\gamma^{-1}(\mathcal{B}_g(\mathbb{R}))$ es una σ-álgebra. Del lema anterior tenemos que $\gamma^{-1}(\tau_g) = \tau_f$, y como γ es una biyección de igual manera se tiene que $\gamma^{-1}(\mathcal{C}_g) = \mathcal{C}_f$. Así concluimos que $\mathcal{B}_{f_{g,\gamma}}(\mathbb{R}) = \gamma^{-1}(\mathcal{B}_g(\mathbb{R}))$. ■

3.3. Comentarios

En está sección damos unos comentarios y observaciones en base a algunos hechos que se tienen en este capítulo, así mismo con ellos enunciamos preguntas abiertas donde se pueden buscar respuestas interesantes estudiando más sobre los conjuntos orelianos de topologías provenientes de selecciones de dos puntos.

Sea g la selección de dos puntos dada en el Ejemplo 1.27 para la cual τ_g es la topología discreta. Para está selección de dos puntos, tenemos que $\mathcal{B}_{f_{g,\gamma}}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ para cada biyección $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Este hecho sugiere la siguiente pregunta:

Pregunta 3.32 ¿Existe $g \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $|\{\mathcal{B}_{f_{g,\gamma}}(\mathbb{R}) \mid \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es una biyección}\}| = \mathfrak{c}$?

No pudimos responder está pregunta, pero es posible probar que este conjunto es infinito para la selección de dos puntos Euclideana f_E. De hecho, consideremos el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y los subconjuntos no Lebesgue medibles $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ construidos en [5, Th. 1.47, p. 32] tales que:

- $E_n \cap E_m = \emptyset$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$;
- si $E_n + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x - y \notin \mathbb{Q}$ para distintos puntos $x, y \in E_n$; y
- $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq (-1, 2)$.

Observemos que $|E_n| = \mathfrak{c}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$ definimos una biyección $\gamma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

- γ_n es una biyección entre E_n y $(-\infty, -1)$;
- γ_n es la función identidad en E_m para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, n\}$; y

- γ_n es una biyección entre $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m\right)$ y $[-1,+\infty) \setminus \left(\bigcup_{n\neq m\in\mathbb{N}} E_m\right)$.

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\gamma_n^{-1}((-\infty,-1)) = E_n \in \mathcal{B}_{f_{f_E,\gamma_n}}(\mathbb{R})$ y $\gamma_n^{-1}(E_m) = E_m \notin \mathcal{B}_{f_{f_E,\gamma_n}}(\mathbb{R})$ para cada $n \neq m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{f_{f_E,\gamma_n}}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_{f_{f_E,\gamma_m}}(\mathbb{R})$ para distintos $n, m \in \mathbb{N}$.

Al igual como en la sección de σ-álgebras dimos una construcción inductiva de la σ-álgebra de Borel, hay muchos otros textos donde existen diversos métodos para hacer dicha construcción. Generalmente hablando existe otro método general de construcción de σ-álgebras en $\mathbb{R}$ el cual lo podemos encontrar de manera detallada en [2, p. 100]:

Si $\mathcal{I}$ es un σ-ideal y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, ambos en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{A}[\mathcal{I}] := \{A \triangle I : A \in \mathcal{A} \text{ e } I \in \mathcal{I}\}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$, donde $A \triangle I = (A \setminus I) \cup (I \setminus A)$. Además, si $\mathcal{I}$ ó $\mathcal{A}$ contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, entonces $\mathcal{A}[\mathcal{I}]$ es una σ-álgebra que contiene a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$.

Ahora mencionemos dos casos particulares de lo dicho anteriormente:

Recordemos que $\mathcal{N}$ es el σ-ideal de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida Lebesgue cero, si consideramos a $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R})[\mathcal{N}]$ es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ Lebesgue medibles, y si que $\mathfrak{M}$ es el σ-ideal de conjuntos magros de $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R})[\mathfrak{M}]$ es una σ-álgebra consistente de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la propiedad de Baire.

Dado lo antes mencionado podriamos preguntarnos si existe la posibilidad de que estas dos σ-álgebras sean o no las σ-álgebras de Borel de topologías que provienen de selecciones de dos puntos, es decir:

Pregunta 3.33 Existen $f, g \in Sel_2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})[\mathcal{N}]$ y $\mathcal{B}_g(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})[\mathfrak{M}]$?

Así como hemos visto a lo largo de este capítulo existen muchas σ-álgebras que se tienen que estudiar en relación a las σ-álgebras de Borel de topologías provenientes de selecciones de dos puntos, una σ-álgebra que sería interesante estudiar más a fondo es la σ-álgebra de Baire, denotada por $Baire(X)$ de un espacio Tychonoff X:

Definición 3.34 Sea X un espacio de Tychonoff. Si $C(X)$ es el conjunto de todas las funciones reales continuas, entonces $Baire(X)$ es la σ-álgebra generada por todos los conjuntos de la forma $\{x \in X \ : \ F(X) > 0\}$ donde $F \in C(X)$. (Pedimos la condición de ser Tychonoff para la existencia de muchas funciones reales continuas).

Observación 3.35 Para cualquier espacio de Tychonoff X sabemos que $Baire(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. También tenemos que si X es perfectamente normal, entonces $Baire(X) = \mathcal{B}(X)$. En particular, obtenemos que $Baire(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y si X es primero numerable, entonces $[X]^{\leq\omega} \subseteq Baire(X)$.

La observación anterior nos hace proponernos un sin fin de preguntas como lo es la siguiente, la cual es muy interesante para un futuro proyecto:

Pregunta 3.36 ¿Existira una selección de dos puntos f tal que $Baire((\mathbb{R}, \tau_f)) \subsetneqq \mathcal{B}_f(\mathbb{R})$?.

Ahora bien, dada $f \in Sel_2(\mathbb{R})$, podriamos preguntarnos de manera natural que si β es una base para la topología τ_f entonces: ¿existe $g \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $< \beta >= \mathcal{B}_g(\mathbb{R})$? La respuesta a esta pregunta es negativa. De hecho, si $f_d \in Sel_2(\mathbb{R})$ es la selección de dos puntos del Ejemplo 1.27 tal que τ_{f_d} es la topología discreta y $\beta := \{\{r\}\ r \in \mathbb{R}\ \}$, entonces $< \beta >= \mathcal{C}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{B}_g(\mathbb{R})$ para cualquier $g \in Sel_2(\mathbb{R})$ (ver Teorema 3.12).

La siguiente pregunta es la formulación de querer responder a la duda que existe sobre que conjuntos podrian estar tanto en los conjuntos Borelianos mediante una selección de dos puntos y el conjunto de los conjuntos medibles con respecto a la medida exterior λ_f. donde $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Pregunta 3.37 ¿Existe $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_{\lambda_f} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$?

Finalizamos este capítulo con la formulación de una pregunta relacionada con el Teorema 3.10

Pregunta 3.38 En un modelo de ZFC, ¿existen $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras en $\mathbb{R}$ las cuales contienen a $[\mathbb{R}]^{\leq\omega}$ y son disjuntos entre sí?

Capítulo 4

Aplicación de Ideales a la Densidad

En este capítulo mencionamos principalmente la topología de densidad de Lebesgue y la topología de $\mathcal{I}$-densidad donde $\mathcal{I}$ es un ideal sobre $\mathbb{R}$, además veremos que algunos resultados estan dados a base del estudio de los conjuntos λ-nulos de $\mathbb{R}$ y también mencionamos algunas aplicaciones de ideales a estas topologías. Los resultados presentados en este capítulo se tomaron del libro [3].

4.1. Topología de Densidad de Lebesgue

A continuación daremos la definición de lo que es un punto de densidad de Lebesgue, la cual esta implicada con la definición de topología de densidad de Lebesgue. Para los resultados siguientes tendremos que I interpretará un intervalo abierto o cerrado según el contexto.

Definición 4.1 (i) La *densidad superior e inferior de Lebesgue* son las funciones de $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ en $[0, 1]$, definidas respectivamente como

$$\overline{d}_A(x) := lim_{n\to\infty} sup\{\frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)} : x \in I \text{ y } \lambda(I) < \frac{1}{n}\} \text{ y}$$

$$\underline{d}_A(x) := lim_{n\to\infty} inf\{\frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)} : x \in I \text{ y } \lambda(I) < \frac{1}{n}\},$$

para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Cuando se da la igualdad $\overline{d}_A(x) = \underline{d}_A(x)$ diremos que este número es la *densidad de* A con respecto a x y la denotaremos por $d_A(x)$.

(iii) Si tenemos el caso cuando $d_A(x) = 1$, a nuestro elemento x se le llamará *punto de densidad* y si $d_A(x) = 0$ será un *punto de dispersión*.

De la definición anterior observemos que $\underline{d}_A(x) \leq \overline{d}_A(x)$, a continuación veremos que la densidad superior e inferior pueden ser diferentes, el siguiente ejemplo da una muestra de ello.

Ejemplo 4.2 Sea $A = [\frac{1}{2}, 1]$ y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ los siguientes intervalos

$$I_n = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big) \quad \text{y} \quad J_n = \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\big).$$

Entonces tenemos que $\frac{\lambda(A \cap I_n)}{\lambda(I_n)} = \frac{n}{n+1}$ y $\frac{\lambda(A \cap J_n)}{\lambda(J_n)} = \frac{1}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aqui obtenemos lo siguiente:

- $\overline{d}_A(\frac{1}{2}) = lim_{n \to +\infty} sup\{\frac{n}{n+1} : \frac{1}{2} \in I_n\} = lim_{n \to +\infty} sup \frac{n}{n+1} = 1.$
- $\underline{d}_A(\frac{1}{2}) = lim_{n \to +\infty} inf\{\frac{1}{n+1} : \frac{1}{2} \in J_n\} = lim_{n \to +\infty} inf \frac{1}{n+1} = 0.$

Por lo anterior obetenemos que $\underline{d}_A\big(\frac{1}{2}\big) \neq \overline{d}_A\big(\frac{1}{2}\big)$, además si hacemos los cálculos para el punto 1 las densidades superior e inferior seran 0 y 1 respectivamente.

Observación 4.3 En cualquer conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que consideremos, notemos que si nos fijamos en los puntos de su interior entonces la densidad de todos sus puntos seran iguales a 1, por este motivo es conveniente considerar puntos que no esten en A para hablar de su densidad.

Otra alternativa de la definición referente a la Desidad inferior y superior es:

$$\overline{d}_A(x) := lim_{h \to 0} sup\{\frac{\lambda(A \cap (x-h, x+h))}{2h} : h > 0\}$$

$$\underline{d}_A(x) := lim_{h \to 0} inf\{\frac{\lambda(A \cap (x-h, x+h))}{2h} : h > 0\},$$

para toda $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$.

A continuación ejemplificamos está defiinción alternativa como sigue.

Ejemplo 4.4 Denotemos por J al intervalo $[0, 1)$. Para este intervalo tenemos los siguientes resultados:

(a) $d_J(0) = lim_{h \to 0} \frac{\lambda(J \cap (x-h, x+h))}{2h} = lim_{h \to 0} \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$

(b) Análogamente, $d_J(1) = \frac{1}{2}$

(c) Para cada $x \in (0, 1)$ tenemos que $d_J(x) = 1$.

(d) Para cada $x \notin [0, 1]$ obtenemos que $d_J(x) = 0$.

Así cada punto $x \in (0, 1)$ tiene densidad 1 en el intervalo J.

Ahora mencionaremos la notación para el conjunto de puntos de densidad de un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definición 4.5 Para $A \subseteq \mathbb{R}$, el *conjunto de puntos de densidad de* A se denotará por $\Phi(A)$, es decir

$$\Phi(A) = \{x \in \mathbb{R} : d_A(x) = 1\}.$$

Observación 4.6 De la definición de $\Phi(A)$ tenemos que $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ y $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

El siguiente lema hace referencia a la Observación 4.3 nos dice que los conjuntos abiertos tiene densidad igual a 1 para cada uno de sus elementos.

Lema 4.7 Si A es un conjunto abierto, entonces $d_A(x) = 1$ para todo $x \in A$.

Demostración. Sea $x \in A$, como A es abierto, entonces existe un intervalo abierto centrado en x, contenido en A. Luego, los intervalos abiertos que se reducen alrededor de x finalmente están contenidos en A, por lo que $d_A(x) = 1$. ■

A continuación enunciaremos el *Teorema de densidad de Lebesgue* dicho teorema establece que para cualquier conjunto Lebesgue medible $A \subseteq \mathbb{R}$, la densidad de A es 0 ó 1 en casi todos los puntos de $\mathbb{R}$, la demostración de este resultado la tomamos en el artículo [4], donde una cuestión importante es que en la prueba no se usa funciones medibles, sino solo las propiedades usuales de la medida exterior y además, la prueba es válida para conjuntos no medibles para ello antes daremos el siguiente resultado previo.

Lema 4.8 [Riesz′s Rising Sun] Sea $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $U \subseteq (a, b)$ un conjunto abierto. Entonces el conjunto

$$U_G := \{x \in U |\text{ existe } y > x \text{ con } (x, y) \subseteq U \text{ y } G(x) > G(y)\}$$

es también abierto. Además, si (c, d) es una componente de U_G, entonces $G(c) \geq G(d)$.

Demostración. Primero probemos que el conjunto U_G es abierto. En efecto, sea $x \in U_G$ entonces $x \in U$ y existe $y > x$ con $(x, y) \subseteq U$ y $G(x) > G(y)$, por esto último y por la continuidad de la función G tenemos que existe $(r, s) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in (r, s)$ y puesto que U es abierto $(r, s) \subseteq U$. Así, para todo $t \in (r, s)$ se tendra que $G(t) > G(y)$ y si tomamos $z \in (r, s)$ entonces $(z, y) \subseteq U$ ya que U es abierto. Por lo tanto $(r, s) \subseteq U_G$, concluyendo que U_G es un conjunto abierto.

Ahora, sea (c, d) cualquier componente de U_G. Probaremos que $G(x) \geq G(d)$ para toda $x \in (c, d)$. Sea $s := max\{r \in [x, d] : G(x) \leq G(r)\}$, y supongamos que $s < d$. Por lo tanto $G(x) < G(d)$ y $s \in U_G$. Existe algún $t > s$ con $(s, t) \subseteq U$ y $G(s) > G(t)$. Si $t \leq d$, entonces $G(x) \geq G(s) > G(t)$ contradiciendo la maximidad de s. Y si $t > d$, entonces $G(d) > G(x) \geq G(s) > G(t)$ implica que $d \in U_G$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $s = d$ y asi obtenemos que $G(x) \geq G(d)$. ■

Teorema 4.9 (Teorema Densidad de Lebesgue). Para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto medible, $\lambda(A \triangle \Phi(A)) = 0$.

Demostración. Probaremos que el conjunto $E := \{x \in A : \overline{d}_A(x) < 1\}$ tiene medida exterior cero, para ello bastará con probar que para $n \in \mathbb{N}, E_n := \{x \in A \cap (-n, n) : \overline{d}_A(x) < \frac{n}{n+1}\}$ tiene medida exterior cero. Consideremos la función $G : [-n, n] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \lambda(A \cap (-n, x)) - \frac{n}{n+1}x.$$

Para $x < y$ por propiedades de la medida exterior de Lebesgue se tiene que

$$\begin{aligned} G(y) - G(x) &= \lambda(A \cap (-n, y)) - \frac{n}{n+1}y - \lambda(A \cap (-n, x)) - \frac{n}{n+1}x \\ &= \lambda(A \cap (-n, y)) - \lambda(A \cap (-n, x)) - \frac{n}{n+1}y - \frac{n}{n+1}x \\ &= \lambda(A \cap (x, y)) - \frac{n(y-x)}{(n+1)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observemos que la función con regla de correspondencia $x \mapsto \lambda(A \cap (-n, x))$ es continua ya que $0 \leq \lambda(A \cap (-n, y)) - \lambda(A \cap (-n, x)) = \lambda(A \cap (x, y)) \leq y - x$. Por lo tanto la función G es continua.

Ahora sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad de regularidad de la medida exterior de Lebesgue λ, tenemos que existe un conjunto abierto $U \subseteq (-n, n)$ tal que $E_n \subseteq U$ y $\lambda(U) < \lambda(E_n) + \epsilon$. Puesto que $\overline{d}_A(x) < \frac{n}{(n+1)}$ para cada $x \in E_n$, deducimos que $E_n \subseteq U_G$. Sea (c_k, d_k) los que denotan a las compenentes de U_G. Por el lema anterior tenemos que $G(c_k) \geq G(d_k)$ para cada k y por lo tanto $\lambda(A \cap (c_k, d_k)) \leq \frac{n(d_k - c_k)}{(n+1)}$. Y por la subaditividad de λ, obtenemos que

$$\lambda(E_n) \leq \sum_k \lambda(E_n \cap (c_k, d_k)) \leq \sum_k \frac{n}{n+1}(d_k - c_k) = \frac{n}{n+1}\lambda(U_G) < \frac{n(\lambda(E_n) + \epsilon)}{n+1}.$$

La anterior desigualdad implica que $\lambda(E_n) < \frac{n(\lambda(E_n)+\epsilon)}{n+1}$ entonces $\lambda(E_n) < \frac{\frac{n}{n}(\lambda(E_n)+\epsilon)}{\frac{n+1}{n}} = \frac{\lambda(E_n)+\epsilon}{\frac{n+1}{n}}$, de aqui que $\frac{n+1}{n}\lambda(E_n) < \lambda(E_n) + \epsilon$ como $\lambda(E_n) > 0$, tenemos que $\frac{n+1}{n}\lambda(E_n) - \lambda(E_n) < \epsilon$ es decir $\frac{(n+1)-n}{n}\lambda(E_n) < \epsilon$ asi obtenemos que $\lambda(E_n) < n\epsilon$. Y puesto que ϵ es arbitrario concluimos la prueba.

Ahora, por simetria el conjunto $F := \{x \in A : \underline{d}_A(x) < 1\}$ tambien tiene medida exterior cero. Por lo tanto $\underline{d}_A(x) = \overline{d}_A(x) = 1$ para casi todos los $x \in A$, y así concluimos la demostración del Teorema de densidad de Lebesgue. ■

Enseguida enunciamos un lema donde utilizaremos el resultado del teorema de densidad de Lebesgue de igual manera este resultado es muy útil en el estudio de este capítulo.

Lema 4.10 Para cada conjunto medible A, el conjunto $\Phi(A)$ es medible.

Demostración. Primero notemos que por el teorema anterior $A \triangle \Phi(A) \in \mathcal{M}$. Ahora como $\Phi(A) \setminus A \subseteq A \triangle \Phi(A)$ entoncces $\lambda(\Phi(A) \setminus A) = 0$ y asi $\Phi(A) \setminus A \in \mathcal{M}$. Luego puesto que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$, tenemos que $A \cup \Phi(A) = (\Phi(A) \setminus A) \cup A$ y $A \cap \Phi(A) = (A \cup \Phi(A)) \setminus (A \triangle \Phi(A))$ son Lebesgue medibles. Por lo tanto, $\Phi(A) = (\Phi(A) \setminus A) \cup (A \cap \Phi(A)) \in \mathcal{M}$ ■

Las siguientes propiedades son referentes a conjuntos Lebesgue medibles, las cuales son relevantes e importantes para el análisis de la topología de densidad.

Teorema 4.11 Si A, B son conjuntos medibles y $\lambda(A \triangle B) = 0$, entonces $\Phi(A) = \Phi(B)$.

Demostración. Sea I un intervalo. Observemos que $(A \setminus B) \cap I \subseteq A \setminus B \subseteq A \triangle B$, así $\lambda((A \setminus B) \cap I) = 0$. De forma similar, tenemos que $\lambda((B \setminus A) \cap I) = 0$. Notemos que $A \cap I = ((A \setminus B) \cap I) \cup (A \cap B \cap I)$ y $B \cap I = ((B \setminus A) \cap I) \cup (A \cap B \cap I)$, entonces $\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap B \cap I) = \lambda(B \cap I)$. Por lo tanto, si x es un punto de densidad de A entonces x será un punto de densidad de B y viceversa. ■

Teorema 4.12 (Distribución de la Intersección) La función de densidad se distribuye a través de la intersección de conjuntos, es decir $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

Demostración. Observemos que $\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi(A)$ y $\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi(B)$, así $\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi(A) \cap \Phi(B)$. Sea I un intervalo.

$$\lambda(I \cap A) + \lambda(I \cap B) \leq \lambda(I) + \lambda(I \cap A \cap B).$$

Dividamos cada lado por la medida $\lambda(I) = |I|$:

$$1 - \frac{\lambda(I \cap A \cap B)}{|I|} \leq 1 - \frac{\lambda(I \cap A)}{|I|} + 1 - \frac{\lambda(I \cap B)}{|I|}.$$

Haciendo algunas operaciones algebraicas tenemos lo siguiente:

$$\frac{\lambda(I \cap A) + \lambda(I \cap B)}{|I|} - 1 \leq \frac{\lambda(I \cap A \cap B)}{|I|}.$$

Ahora cuando $|I| \to 0$, entonces $d_A(x) + d_B(x) - 1 \leq d_{A \cap B}(x)$. Si $x \in \Phi(A)$ y $x \in \Phi(B)$, tenemos que $d_A(x) = d_B(x) = 1$. Entonces, por la desigualdad anterior,

$$d_A(x) + d_B(x) - 1 = 1 \leq d_{A \cap B}(x).$$

La densidad $d_{A \cap B}(x)$ esta acotada por 1. Asi $d_{A \cap B}(x) = 1$. Entonces $\Phi(A) \cap \Phi(B) = \Phi(A \cap B)$. ■

A continuación veremos que en los siguientes dos lemas que Φ cumple la propiedad de monotonia dados dos conjuntos en $\mathbb{R}$.

Lema 4.13 (Monotonía) Dado un conjunto $A \subseteq B$, entonces $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$.

Demostración. Notemos que $A \subseteq B$ implica que $A \cap B = A$. Usando el teorema anterior, tenemos que $\Phi(A) = \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B) \subseteq \Phi(B)$. ■

En el lema anterior observemos que no es necesario que $A \subseteq B$ para que $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$, ya que basta con que $A \setminus B$ tenga medida cero.

Lema 4.14 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\lambda(A \setminus B) = 0$, entonces $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$.

Demostración. Supongamos que $\Phi(A) \nsubseteq \Phi(B)$. Entonces existe $a \in \Phi(A)$ tal que $a \notin \Phi(B)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1.

$$lim_{h \to 0} \frac{\lambda((A \setminus B) \cap (x-h, x+h))}{2h} > 0.$$

Entonces existe un $G \subseteq A$ tal que $G \cap B = \emptyset$ y $\lambda(G) > 0$. Entonces $\lambda(A \setminus B) \geq \lambda(G) > 0$. Esto contradice la suposición de que $\lambda(A \setminus B) = 0$.

Caso 2.

$$lim_{h \to 0} \frac{\lambda((A \setminus B) \cap (x-h, x+h))}{2h} = 0. \qquad (i)$$

Como $a \notin \Phi(B)$,

$$lim_{h \to 0} \frac{\lambda(B \cap (x-h, x+h))}{2h} = 0. \qquad (ii)$$

Combinando (i) y (ii), tenemos lo siguiente

$$lim_{h\to\infty}\frac{\lambda(A\cap(x-h,x+h))}{2h}=0.$$

Así $a\notin\Phi(A)$, contradiciendo la suposición. ■

Ahora veremos que Φ cumple la propiedad de ser idempotente.

Lema 4.15 (Idempotencia) Sea $A\subseteq\mathbb{R}$, entonces $\Phi(A)=\Phi(\Phi(A))$.

Demostración. Sea $x\in\Phi(A)$. Entonces

$$lim_{h\to 0}\frac{\lambda(A\cap(x-h,x+h))}{2h}=1.$$

Por el teorema de la densidad de Lebesgue tenemos, $\lambda(A\triangle\Phi(A))=0$. Asi, $\lambda(A\cap(x-h,x+h))=\lambda(\Phi(A)\cap(x-h,x+h))$, y

$$d_{\Phi(A)}(x)=lim_{h\to 0}\frac{\lambda(\Phi(A)\cap(x-h,x+h))}{2h}=lim_{h\to 0}\frac{\lambda(A\cap(x-h,x+h))}{2h}=d_A(x).$$

Por lo tanto $d_{\Phi(A)}(x)=1$ si y sólo si $d_A(x)=1$. Entonces $\Phi(\Phi(A))=\Phi(A)$. ■

Sabemos del teorema de densidad de Lebesgue, que un conjunto A difiere de $\Phi(A)$ solo en un conjunto de medida cero. También conocemos que un conjunto medible se diferencia de su complemento por un conjunto de medida mayor que cero. El siguiente teorema nos ayuda a deducir si $\Phi(A)$ y $\Phi(A^c)$ comparten algún elemento o no.

Teorema 4.16 Si A es un conjunto medible, entonces $\Phi(A)\cap\Phi(A^c)=\emptyset$.

Demostración. Supongamos lo contrario que $\Phi(A)\cap\Phi(A^c)\neq\emptyset$. Entonces existe $x\in\Phi(A)\cap\Phi(A^c)$. Sea $I_n=(x-\frac{1}{2n},x+\frac{1}{2n})$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Como $x\in\Phi(A)$, entonces $\frac{\lambda(A\cap I_n)}{\lambda(I_n)}\to 1$. Así existe un N_1 tal que para $n\geq N_1, \lambda(A\cap I_n)>\frac{2}{3}\lambda(I_n)$. Similarmente, existe un N_2 tal que para cualquier $n\geq N_2, \lambda(A^c\cap I_n)>\frac{2}{3}\lambda(I_n)$. Sea $N=max\{N_1,N_2\}$. Entonces para $n\geq N$, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\lambda(A\cap I_n)>\frac{2}{3}\lambda(I_n)\quad \text{y}\quad \lambda(A^c\cap I_n)>\frac{2}{3}\lambda(I_n).$$

Notemos que $(A\cap I_n)\cap(A^c\cap I_n)=\emptyset$. Asi $\lambda(I_n)\geq\lambda(A\cap I_n)>\frac{4}{3}\lambda(I_n)$. Esto es una contradicción, por lo tanto $\Phi(A)\cap\Phi(A^c)=\emptyset$. ■

Ahora procederemos a definir una topología la cual se tomara como referencia para definir nuevas topologías que estaran estrechamente relacionadas con ella.

Definición 4.17 Denotemos a la familia de los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ tales que estan contenidos en el conjunto de sus puntos de densidad como sigue:

$$\tau_{\mathfrak{L}} = \{A \in \mathcal{M} : A \subseteq \Phi(A)\}.$$

Enseguida enunciaremos que la familia $\tau_{\mathfrak{L}}$ dada anteriormente es una topología en $\mathbb{R}$ pero antes daremos la siguiente definición.

Definición 4.18 Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tiene la condición de cadena contables (c.c.c.) si no existe una familia no numerable de conjuntos ajenos medibles entre si con medida positiva.

Teorema 4.19 El espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ tiene la c.c.c.

Demostración. Supongamos que la familia de conjuntos medibles $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ todos sus elementos son ajenos entre sí y tienen medida positiva. Notemos que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que el conjunto $\{\alpha : B_\alpha \cap [z, z+1]$ tiene medida exterior de Lebesgue positiva$\}$ es no numerable.
Definamos $C_\alpha := B_\alpha \cap [z, z+1]$ y observemos que todos los C_α estan acotados debido a que $B_\alpha \cap [z, z+1] \subseteq [z, z+1]$ y el intervalo $[z, z+1]$ tiene longitud 1.
Ahora, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C = \{C_\alpha : \lambda(C_\alpha) > \frac{1}{m}\}$ es no numerable. Tomemos $C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_{m+1}} \in C$ distintos entonces como son ajenos y son medibles, se tiene que $\lambda(\bigcup_{i \leq m+1} C_{\alpha_i}) = \sum_{i \leq m+1} \lambda(C_{\alpha_i}) \geq \frac{m+1}{m} > 1$ lo cual es una contradicción ya que $\bigcup_{i \leq m+1} C_{\alpha_i} \subseteq [z, z+1]$ y $\lambda(\bigcup_{i \leq m+1} C_{\alpha_i})$. ■

Teorema 4.20 La familia $\tau_{\mathfrak{L}}$ es una topología en $\mathbb{R}$. Además, si $B \in \tau_{\mathfrak{L}}$, entonces B es Lebesgue medible; es decir,

$$\tau_{\mathfrak{L}} = \{A \in \mathcal{M} : A \subseteq \Phi(A)\} \subseteq \mathcal{M}.$$

Demostración. Por la observacion 4.6 tenemos que el conjunto $\{\emptyset\}$ y $\mathbb{R}$ son elementos de $\tau_{\mathfrak{L}}$, por el Teorema 4.12 tenemos que $\tau_{\mathfrak{L}}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Solo falta probar que $\tau_{\mathfrak{L}}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias, notemos que para esto solo tenemos la propiedad de que $\tau_{\mathfrak{L}} \subseteq \mathcal{M}$ y sabemos $\mathcal{M}$ es cerrado solo bajo uniones numerables. Consideremos $\{A_i\}_{i \in I}$ elementos en $\tau_{\mathfrak{L}}$. Para cada $i \in I$ se cumple que $A_i \subseteq \Phi(A_i)$ y por el teorema anterior, podemos escoger una sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in I$ se cumple que $\lambda\big(A_i \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n}\big) = 0$. Luego, para cada $i \in I$, aplicando el teorema de monotonia tenemos que $\Phi(A_i) \subseteq \Phi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n})$. Entonces tenemos lo siguiente

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \Phi(A_i) \subseteq \Phi\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n}\big).$$

Como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n}$ y $\Phi\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n}\big)$ son medibles y $\lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n} \triangle \Phi\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{r_n}\big)) = 0$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es Lebesgue medible. Como $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ para cada $i \in I$, por la propiedad de monotonia se tiene que $\bigcup_{i \in I} \Phi(A_i) \subseteq \Phi(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Por lo tanto la unión de los elementos de A_i esta contenida en $\Phi(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Asi concluimos que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{\mathfrak{L}}$. ■

Por lo descrito anteriormente, $\tau_{\mathfrak{L}}$ es una topología en $\mathbb{R}$ la cual se llamará *Topología de Densidad en* $\mathbb{R}$, inducida por la medida exterior de Lebesgue.

Ahora enunciemos un teorema que da como resultado la comparación que se tiene de la topología de densidad $\tau_{\mathfrak{L}}$ y la topología Euclideana τ_E.

Teorema 4.21 La topología $\tau_{\mathfrak{L}}$ es estrictamente mas fina que la topología τ_E, es decir ($\tau_E \subset \tau_{\mathfrak{L}}$).

Demostración. Afirmación: $\tau_{\mathfrak{L}} = \{\Phi(A) \setminus N : A \in \mathcal{M} \text{ y } N \in \mathcal{N}\}$.

Prueba de la afirmación: Si $A \in \tau_{\mathfrak{L}}$, entonces $A \subseteq \Phi(A)$ y $A = \Phi(A) \setminus (\Phi(A) \setminus A)$, utilizando el teorema de densidad de Lebesgue tenemos $\Phi(A) \setminus A$ es un conjunto nulo.

Si $B \in \{\Phi(A) \setminus N : A \in \mathcal{M} \text{ y } N \in \mathcal{N}\}$ entonces B es un conjunto Lebesgue medible. Como $\Phi(\Phi(A) \setminus N) = \Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$ se cumple también que $\Phi(A) \setminus N \subseteq \Phi(\Phi(A) \setminus N)$.

Observemos asi que si (a, b) es un intervalo abierto Euclideano, entonces $(a, b) = \Phi((a, b))$, por lo que $\tau_E \subseteq \tau_{\mathcal{N}}$.

Para probar que la inclusión estricta consideremos un connjunto de la forma $\mathbb{R} \setminus N$, donde $N \in \mathcal{N}$. ■

Ahora a continuación damos algunas propiedades importantes de la Topología de Densidad.

Teorema 4.22 La topología $\tau_{\mathfrak{L}}$ sobre $\mathbb{R}$ tiene las siguientes propiedades:

(i): $\tau_{\mathfrak{L}}$ es Hausdorff;

(ii): un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ es compacto con respecto a $\tau_{\mathfrak{L}}$ si y sólo si C es finito;

(iii): $\tau_{\mathfrak{L}}$ es completamente regular, pero no normal.

Demostración. Para (i): Tomemos $r, s \in \mathbb{R}$ con $r \neq s$, ahora podemos elegir intervalos abiertos Euclideanos tales que $r \in J_r$ y $s \in J_s$ y $J_r \cap J_s = \emptyset$, entonces por el teorema anterior los intervalos J_r y J_s también son elementos de la topología de densidad $\tau_{\mathfrak{L}}$ y asi tenemos vecindades disjuntas para r y s.

Para (ii): Es claro que si suponemos que $C \subseteq \mathbb{R}$ es finito entonces este será compacto.

Ahora, supongamos que C es infinito y demos $M \subseteq C$ numerale. Para $m \in M$ el conjunto $(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{m\}$ es Lebesgue medible entonces $\Phi((\mathbb{R} \setminus M) \cup \{m\}) = \Phi(\mathbb{R} \setminus M) = \Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Así, para cada $m \in M$ se tiene que $(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{m\} \in \tau_{\mathfrak{L}}$. Por lo tanto $\{(\mathbb{R} \setminus M) \cup \{m\} : m \in M\}$ es una cubierta para C con elementos de $\tau_{\mathfrak{L}}$, la cual no contiene una subcubierta finita lo cual es una contradicción. Así, concluimos que C es finito. Para (iii): El lector puede consultar la prueba de este resultado en el libro [3]. ■

A continuación veremos una serie de equivalencias para la definición de punto de densidad para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue medible, dicho resultado involucra sucesiones de funciones al igual que utiliza la siguiente definición importante.

Definición 4.23 Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles. Decimos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a φ, si para cada $\epsilon > 0$ tenemos que

$$lim_{n\to+\infty}\mu\big(\{x \in X : |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \geq \epsilon\}\big) = 0.$$

Teorema 4.24 Sea A un conjunto medible, consideremos las siguientes series de equivalencias.

(i): x es un punto de densidad de A;

(ii): $lim_{n\to\infty}\frac{\lambda((A-x)\cap(\frac{1}{n},\frac{1}{n}))}{\frac{2}{n}} = 1$;

(iii): $lim_{n\to\infty}\lambda(n(A-x)\cap(-1,1)) = 2$;

(iv): $\chi_{n(A-x)\cap(-1,1)}$ converge a $\chi_{(-1,1)}$ en medida; y,

(v): para cada sucesión creciente $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de números naturales existe una subsucesión $\{n_{m_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ tal que $\chi_{n_{m_p}(A-x)\cap(-1,1)}$ converge casi en todas partes a $\chi_{[-1,1]}$.

Demostración. Probemos (i) implica (ii): Notemos que usando la definición alternativa de punto de densidad tenemos que $lim_{n\to\infty}\frac{\lambda((A-x)\cap(\frac{1}{n},\frac{1}{n}))}{\frac{2}{n}} = 1$;.

Para (ii) implica (i): Sin pérdida de generalidad probemos esta implicación solo para $x = 0$.

Sea $h_n < 1$ cualquier sucesión de números positivos convergente a 0. Para cada n, sea $\underline{h_n} = max\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} \leq h_n\}$ y $\overline{h_n} = min\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} \geq h_n\}$.

Así, tenemos que $lim_{n\to\infty}\frac{\underline{h_n}}{h_n} = 1 = lim_{n\to\infty}\frac{\overline{h_n}}{h_n}$. Entonces

$$\frac{\underline{h_n}}{h_n}\frac{\lambda(A\cap(\underline{-h_n},\underline{h_n}))}{2\underline{h_n}} \leq \frac{\lambda(A\cap(-h_n,h_n))}{2h_n} \leq \frac{\overline{h_n}}{h_n}\frac{\lambda(A\cap(\overline{-h_n},\overline{h_n}))}{2\overline{h_n}}.$$

Y como $lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(A\cap(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}))}{\frac{2}{n}} = 1$ concluimos que $lim_{h\to 0}\frac{\lambda(A\cap(-h,h))}{2h} = 1$.

Probemos (ii) si y sólo si (iii): Por propiedades de la medida exterior de Lebesgue tenemos que si $A \in \mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lambda(nE) = n\lambda(E)$, de aquí obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\lambda((A-x)\cap[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}])}{\frac{2}{n}}\Big] &= lim_{n\to+\infty}\Big[n\frac{\lambda((A-x)\cap[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}])}{2}\Big] \\ &= \frac{1}{2}lim_{n\to+\infty}[\lambda(n(A-x)\cap[-1,1])] = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Probemos (iii) si y sólo si (iv): Observemos que

$$\lambda([-1,1]\setminus n(A-x)\cap[-1,1]) = 2 - \lambda(n(A-x)\cap[-1,1])$$

y además, para $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente igualdad de conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : |\chi_{n(A-x)\cap[-1,1]}(x) - \chi_{[-1,1]}(x)| \geq \epsilon\} = [-1,1]\setminus(n(A-x)\cap[-1,1])$. Así, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n > N$, entonces $2 - \lambda(n(A-x)\cap[-1,1]) = \lambda\big([-1,1]\setminus(n(A-x)\cap[-1,1])\big) \leq \epsilon$ si y sólo si la sucesión $\big(\chi_{(n(A-x)\cap[-1,1])}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a $\chi_{[-1,1]}$.

Para (iv) si y sólo si (v), la demostración de este resultado el lector la puede encontar en [3]. ■

4.2. Topología de $\mathcal{I}$-Densidad

Ahora procederemos a dar el concepto de lo que se llamará $\mathcal{I}$-densidad y enunciaremos una topología con respecto a está definición, las cuales nuevamente reflejan la importancia del σ-ideal de los conjuntos nulos en $\mathbb{R}$ de igual manera veremos que varias de sus propiedades son similares a la topología de densidad vista anteriormente. El lector puede consultar el libro [3] para ampliar el estudio de los siguientes resultados.

A continuación daremos una serie de definiciones, las cuales nos servirán para poder definir lo que llamaremos un punto de $\mathcal{I}$-densidad respecto a un ideal $\mathcal{I}$ sobre un conjunto X.

Recordemos que si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $A \subseteq X$ tal que $A \in \mathcal{A}$ entonces una función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible si satisface la condición de que para cada número real s el conjunto $\{x \in A : \varphi(x) \leq s\} \in \mathcal{A}$.

Definición 4.25 Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathcal{I}$-casi en todas partes a una función $\mathcal{A}$-medible φ si

$$\{x \in X : \varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ cuando } n \to +\infty\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}},$$

donde $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ es un σ-ideal en X y $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$.

A continuación damos un ejemplo de la definición anterior donde se muestra una generalización a un espacio de medida.

Ejemplo 4.26 Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles. Decimos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ casi en todas partes, si el conjunto

$$N = \{x \in X : \{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ no converge a } \varphi(x)\} \text{ es elemento de } \mathcal{A} \text{ y cumple que } \mu(N) = 0.$$

Enseguida definiremos los puntos de $\mathcal{I}$-densidad tomando como referencia la clausula (v) del Teorema 4.24. En las siguientes definiciones y propiedades, $\mathcal{A}$ será una σ-álgebra de subconjutos de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ será el σ-ideal de conjuntos.

Definición 4.27 (i) Decimos que 0 es un punto de $\mathcal{I}$-densidad de un conjunto $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si para cada sucesión creciente $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos existe una subsucesión $\{n_{m_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ tal que

$$lim_{p\to+\infty}\chi_{(n_{m_p}A\cap(-1,1))} = \chi_{(-1,1)}$$

(ii) Diremos que a es un punto de $\mathcal{I}$-densidad de $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si 0 es un punto de $\mathcal{I}$-densidad del conjunto $A - s = \{a - s : a \in A\}$.

(iii) a es un punto de $\mathcal{I}$-dispersión para A si $\chi_{(n(A-a)\cap[-1,1])}$ converge a 0 con respecto a $\mathcal{I}$ en $[-1, 1]$.

Ahora, introducimos la siguiente notación, la cual servirá para poder definir la topología de $\mathcal{I}$-densidad y posteriormente veremos propiedades interesantes y análogas referentes al conjunto de puntos de densidad visto anteriormente.

Definición 4.28 El conjunto de todos los puntos de $\mathcal{I}$-densidad para $A \in \mathcal{A}$ lo denotaremos por $\Phi^{\mathcal{I}}(A)$, es decir;

$$\Phi^{\mathcal{I}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un punto de } \mathcal{I} - \text{densidad de } A\}.$$

Con el siguiente resultado probamos la análogia que existe dentro de las propiedades de la $\mathcal{I}$-densidad respecto a la densidad de Lebesgue de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 4.29 Para cada $A \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathbb{R}$ definamos el siguiente conjunto

$$O_A^x = \{y \in [-1,1]; \chi_{(n_{m_p}(A-x)\cap[-1,1])(y)} \text{ converge a } \chi_{[-1,1]}(y) \text{ cuando } p \to +\infty\}.$$

Lema 4.30 Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $O_{A\cap B}^x = O_A^x \cap O_B^x$.

Demostración. Si $y \in O_A^x \cap O_B^x$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada subsucesión de $(\chi_{(n(A_i-x)\cap[-1,1])}(y))_{m\in\mathbb{N}}$ existen $N_{y,\epsilon}^1, N_{y,\epsilon}^2 \in \mathbb{N}$ tal que cuando $p > N_{y,\epsilon}^1, N_{y,\epsilon}^2$, se tiene $-1 \le y = n_{m_p}(r_i - x) \le 1, r_i \in S_i$ con $i = 1, 2$. Luego, para $p > N = max\{N_{y,\epsilon}^1, N_{y,\epsilon}^2\}$ tenemos que $r_1 = r_2 = r$, lo cual implica que r es elemento de $A \cap B$. Por lo que, cada subsucesión de $\{\chi_{(n_m((A\cap B)-x)\cap[-1,1])}(y)\}_{m\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión que converge a $1 = \chi_{[-1,1]}(y)$. Y así $y \in O_{A\cap B}^x$. Ahora, si $y \in O_{A,B}^x$ y cumple $-1 \le y = n_{m_p}(r - x) \le 1$, entonces $r \in n_{m_p}(A - x)$ y $r \in n_{m_p}(B - x)$. Entonces para $i = 1, 2$ cada subsucesión de $\{\chi_{(n_m(A-x)\cap[-1,1])}(y)\}_{m\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge a $\chi_{[-1,1]}(y)$. Por lo tanto $y \in O_A^x \cap O_B^x$. ■

Lema 4.31 Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra. Si $A, B \in \mathcal{A}$, se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\Phi^{\mathcal{I}}(\emptyset) = \emptyset$ y $\Phi^{\mathcal{I}}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R})$.

(b) (Monotonia) Si $A \subseteq B$ entonces $\Phi^{\mathcal{I}}(A) \subseteq \Phi^{\mathcal{I}}(B)$.

(c) (Distribución respecto a la intersección) $\Phi^{\mathcal{I}}(A \cap B) = \Phi^{\mathcal{I}}(A) \cap \Phi^{\mathcal{I}}(B)$.

Demostración. Para (a): Para cada $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, se tiene que $n(\mathbb{R} - x) \cap [-1,1] = n(\mathbb{R}) \cap [-1,1] = [-1,1]$ y $n(\emptyset - x) = n(\emptyset) \cap \cap[-1,1] = \emptyset$. Así $\chi_{(n(\mathbb{R}-x)\cap[-1,1])} = \chi_{[-1,1]}$ y $\chi_{(n(\emptyset-x)\cap[-1,1])} = 0$, por lo tanto $\Phi^{\mathcal{I}}(\emptyset) = \emptyset$ y $\Phi^{\mathcal{I}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Para (b): Supongamos que $x \in \Phi^{\mathcal{I}}(A)$ entonces $\chi_{(n(A-x)\cap[-1,1])}$ converge a $\chi_{[-1,1]}$ con respecto a $\mathcal{I}$ en $[-1,1]$. Ahora para los siguientes conjuntos

$$O_A^x = \{y \in [-1,1]; \chi_{(n_{m_p}(A-x)\cap[-1,1])(y)} \text{ converge a } \chi_{[-1,1]}(y) \text{ cuando } p \to +\infty\} \text{ y}$$

$$O_B^x = \{y \in [-1,1] : \chi_{(n_{m_p}(B-x)\cap[-1,1])}(y) \text{ converge a } \chi_{[-1,1]}(y) \text{ cuando } p \to +\infty\}$$

tenemos que el primero esta contenido en el segundo, por lo que se cumple $x \in \Phi^{\mathcal{I}}(B)$.

Para (c): Por (b) tenemos que $\Phi^{\mathcal{I}}(A \cap B) \subseteq \Phi^{\mathcal{I}}(A) \cap \Phi^{\mathcal{I}}(B)$.

Ahora demostremos que $\Phi(A)^{\mathcal{I}} \cap \Phi(B)^{\mathcal{I}} \subseteq \Phi(A \cap B)^{\mathcal{I}}$. Si $x \in \Phi(A) \cap \Phi(B)$, entonces por el Lema 4.30, $O_A^x \cap O_B^x \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Por lo tanto $x \in \Phi(A \cap B)^{\mathcal{I}}$. ■

Enseguida definimos una familia la cual tiene como propiedad ser una topología en $\mathbb{R}$, dicha topología se llama la *Topología de $\mathcal{I}$-Densidad*.

Proposición 4.32 La familia $\tau_{\mathcal{I}} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq \Phi^{\mathcal{I}}(A)\}$ es una topología en $\mathbb{R}$.

Demostración. Por el Lema 4.31 damos por hecho que $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau_{\mathcal{I}}$.

Si $A, B \in \tau_{\mathcal{I}}$ entonces por el resultado anterior $A \cap B \subseteq \Phi^{\mathcal{I}}(A) \cap \Phi^{\mathcal{I}}(B) = \Phi^{\mathcal{I}}(A \cap B)$, por lo que $A \cap B \in \tau_{\mathcal{I}}$

Sean $\{A_i : i \in I\}$ una colección de elementos en $\tau_{\mathcal{I}}, x \in \Phi^{\mathcal{I}}(A_i)$. Como para cada $i \in I$ se tiene que $O^x_{A_i} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, por el lema anterior y $O^x_{A_i} \subseteq O^x_{\bigcup_{i \in I} A_i}$ entonces el conjunto $O^x_{\bigcup_{i \in I} A_i} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ y tenemos $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \Phi^{\mathcal{I}}(A_i) \subseteq \Phi^{\mathcal{I}}(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Por lo que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{\mathcal{I}}$. ■

4.3. Comentarios

A lo largo de este capítulo, hemos visualizado la gran importancia de la medida exterior de Lebesgue sobre la densidad de Lebesgue y la $\mathcal{I}$-densidad. Es natural por ello preguntarse si estos resultados serian válidos o no cuando reemplacemos la medida exterior de Lebesgue por la medida exterior inducida por selecciones de dos puntos, con ello hacernos diversas preguntas como lo es la siguiente:

Pregunta 4.33 ¿Cuantás topologías $\mathcal{N}_{\lambda_f}$-densidad distintas se pueden tener variando las selecciones de dos puntos?

En el artículo [14], los autores demostraron que suponiendo el Axioma de Martin (MA) se tenia que si $cf(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$ (donde $cf(\mathcal{I})$ es la cofinalidad de $\mathcal{I}$) esto implicaba la existencia de $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{N}_{\lambda_f} = \mathcal{I}$. Además, en el mismo artículo se probó la existencia de $\mathcal{I}$ tal que $cf(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{c}$.

Con estos resultados se podría hacer la siguiente pregunta referente a dos topologías de $\mathcal{I}$-densidades:

Pregunta 4.34 Si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales tales que $cf(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$ y $cf(\mathcal{J}) \geq \mathfrak{c}$ entonces ¿$\tau_{\mathcal{I}}$ y $\tau_{\mathcal{J}}$ se pueden distinguir topologicamente?

Capítulo 5

Funciones (f, g)-medibles

En este capítulo introduciremos uno de los temas más importantes y destacados de la Teoría de la Medida, adecuados al estudio de las funciones medibles respecto a una selección de dos puntos. Al igual que las f-medidas exteriores dadas en el capítulo 2, en está ocasión veremos que las funciones (f, g)-medibles tienen propiedades análogas respecto a las funciones medibles, sin embargo habrá casos en donde las concluciones de algunos resultados serán completamente contrarios a los ya conocidos en Teoría de la Medida.

5.1. Propiedades de las funciones (f,g)-medibles

Empezaremos introduciendo la definición de lo que llamaremos una función (f, g)-medible, de igual manera observaremos que es muy parecida a la definición de función medible dada en los libros de Teoría de la Medida, en este caso nosotros utilizaremos la σ-álgebra de Borel inducida por una selección de dos puntos f, $[\mathcal{B}_f(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\tau_f)]$, estudiadas en el capítulo 3.

Definición 5.1 Sean $f, g \in Sel_2(\mathbb{R})$. Una función $\sigma : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\tau_f)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\tau_g))$ es (f, g)-medible si para todo $B \in \mathcal{B}(\tau_g)$ se cumple que $\sigma^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\tau_f)$.

A continuación enunciamos un resultado donde podremos observar la primera analogía respecto a las funciones medibles, ya que este teorema es muy parecido al que nos muestran en un curso de Teoria de la Medida; también nos será de gran ayuda para probar los siguientes resultados, antes damos un lema importante sobre las funciones medibles.

Lema 5.2 Sean $(X, \mathcal{A})$ espacio medible, $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ y supongamos que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ donde $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de Y. Entonces

$$\varphi \text{ es medible si y sólo si } \varphi^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Demostración. Si tenemos que $\varphi^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$ entonces $\sigma(\varphi^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}$ y por lo tanto

$$\varphi(\sigma(\mathcal{C})) = \varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \sigma(\varphi^{-1}\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Ahora si φ es medible entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}$ además tenemos que $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ así $\varphi^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}$. Por lo tanto $\varphi^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$. ∎

Lema 5.3 Sean $f, g \in Sel_2(\mathbb{R})$, $\sigma : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\tau_f)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\tau_g))$ una función sobreyectiva. Supongamos que $(\mathbb{R}, \tau_g)$ es segundo numerable entonces, σ es (f, g)-medible si y sólo si una de las siguientes cláusulas se cumple

1) $\sigma^{-1}((r, s)_g) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$.

2) $\sigma^{-1}((\leftarrow, s)_g) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

3) $\sigma^{-1}((r, \rightarrow)_g) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para toda $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si suponemos que σ es (f, g)-medible esto implica las propiedades $1), 2)$ y $3)$ ya que por la Observación 1.24, tenemos que $(r, s)_g, (\leftarrow, s)_g, (r, \rightarrow)_g \in \tau_g \subseteq \mathcal{B}(\tau_g)$ y por hipótesis $\sigma^{-1}((r, s))_g, \sigma^{-1}((\leftarrow, s))_g, \sigma^{-1}((r, \rightarrow))_g \in \mathcal{B}(\tau_f)$.

Y si se cumple cualquiera de las cláusulas 1),2) ó 3) entonces por el Lema 5.2, tenemos que σ es (f, g)-medible. ■

Enseguida enunciamos una definición en la cual el siguiente teorema hace referencia a ella, y nos dice cuando tendremos una función (f, g)-medible.

Definición 5.4 Sean $f, g \in Sel_2(\mathbb{R})$. Una función $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es (f, g)-orden preservadora si para cada $r, s \in \mathbb{R}$ se cumple que $r <_f s$ si y sólo si $\sigma(r) <_g \sigma(s)$.

Teorema 5.5 Si la función sobreyectiva σ es (f, g)-orden preservadora entonces σ es (f, g)-medible.

Demostración. Sea $(r, s)_g \in \tau_g$, como σ es sobreyectiva existen $y, z \in \mathbb{R}$ tales que $\sigma(y) = r$ y $\sigma(z) = s$.

Ahora, probaremos que $\sigma((y, z)_f) = (r, s)_g$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \in (r, s)_g &\Leftrightarrow r <_g x <_g s \\ &\Leftrightarrow \sigma(y) <_g x <_g \sigma(z) \\ &\Leftrightarrow y <_f \sigma^{-1}(x) <_f z \text{ (por ser } \sigma \text{ una función } (f, g) - \text{orden preservadora)} \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(x) \in (y, z)_f \\ &\Leftrightarrow x \in \sigma(y, z)_f. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Así, tenemos que $(y, z)_f = \sigma^{-1}((r, s)_g) \in \tau_f \subseteq \mathcal{B}(\tau_f)$ y por el teorema anterior concluimos que σ es (f, g)-medible. ■

Recordemos que la topología discreta τ_{f_d} es la topología inducida por la selección de dos puntos f_d, en el capítulo primero y tercero vimos varios resultados entorno a está topología. Ahora, enunciemos el siguiente teorema respecto a la topología τ_{f_d} en contexto a las funciones (f, g)-medibles.

Teorema 5.6 Toda función $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es (f_d, f)-medible para toda $f \in Sel_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(\tau_f)$ entonces $\sigma^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\tau_{f_d})$. ■

La siguiente notación y definición permitirán enunciar un lema destacado en donde se veran varias cláusulas relevantes acerca de las funciones (f,g)-medibles.

Notación 5.7 Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ denotaremos por $A <_f B$ a lo siguiente:

$$\text{para cada } a \in A \text{ y para cada } b \in B \text{ se tendra que } a <_f b.$$

Definición 5.8 Sea $f \in Sel_2(\mathbb{R})$. Diremos que la función sobreyectiva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sus fibras estan f-ordenadas si para cada $r, s \in \mathbb{R}$ con $r \neq s$ se cumple que $\sigma^{-1}(r) <_f \sigma^{-1}(s)$ ó $\sigma^{-1}(s) <_f \sigma^{-1}(r)$.

Lema 5.9 Sea $f \in Sel_2(\mathbb{R})$. Supongamos que la función sobreyectiva $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es con fibras f-ordenadas tal que $\sigma^{-1}(t) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$ existen $M_t, m_t \in \sigma^{-1}(t)$ y existe $h \in Sel_2(\mathbb{R})$ tales que cumplen lo siguiente

1. $m_t \leq_h r \leq_h M_t$ para cada $r \in \sigma^{-1}(t)$.
2. $\sigma^{-1}(s) <_f \sigma^{-1}(r)$ si y sólo si $\sigma^{-1}(s) <_h \sigma^{-1}(r)$ para cada $r, s \in \mathbb{R}$.
3. f y h coinciden en los pares de puntos restantes.
4. $\sigma^{-1}(t) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Definamos a la selección de dos puntos h como sigue

$$r <_h s \text{ si y sólo si } \sigma^{-1}(r) <_f \sigma^{-1}(s),$$

y $h \in Sel_2(\mathbb{R})$ mantendrá el orden Euclideano para los demás pares de puntos faltantes.

Por hipotesis para $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ tenemos que $\sigma^{-1}(t) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definamos los siguientes puntos $min\sigma^{-1}(t) = m_t$ y $mx\sigma^{-1}(t) = M_t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. $\quad (*)$

Ahora afirmamos lo siguiente

$$\sigma^{-1}((r,s)_h) = \bigcup_{r<_h t<_h s} \sigma^{-1}(t) = (M_r, m_s)_f.$$

Prueba de la afirmación:

$$\begin{aligned} q \in \bigcup_{r<_h t<_h s} \sigma^{-1}(t) &\Leftrightarrow \sigma(q) = t \text{ y } r <_h t <_h s \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(r) <_f \sigma^{-1}(t) <_f \sigma^{-1}(s) \\ &\Leftrightarrow M_r <_f \sigma^{-1}(t) <_f m_s \\ &\Leftrightarrow q \in (M_r, m_s)_f. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para 1. Para cada $r \in \sigma^{-1}(t)$ tenemos por la definición $(*)$ que $m_t \leq_h r \leq_h M_t$.

Para 2. Utilicemos la Notación 5.7 y veamos la siguiente serie de equivalencias:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(s) <_h \sigma^{-1}(r) &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(a) <_f \sigma^{-1}(b) \text{ con } a \in \sigma^{-1}(s) \text{ y } \sigma^{-1}(r) \\ &\Leftrightarrow a <_h b \text{ con } a \in \sigma^{-1}(s) \text{ y } \sigma^{-1}(r) \text{ por definición de } h \\ &\Leftrightarrow a <_h b \text{ por notación 5.7} \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(a) <_f \sigma^{-1}(b) \\ &\Leftrightarrow a <_f b \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(s) <_f \sigma^{-1}(r). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para 3. Por definición de la selección de dos puntos h se concluye está clausula.

Para 4. Por la afirmación del incio tenemos que $\sigma^{-1}((r,s)_h) = (M_r, m_s)_f \in \mathbb{B}(\tau_f)$, por lo tanto $\sigma^{-1}(t) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. ■

A continuación, veremos que la composición de funciones (f,g)-medibles también será una función (f,g)-medible, y así podemos observar que comparte este resultado con las funciones medibles.

Lema 5.10 Sean $f, g, h \in Sel_2(\mathbb{R})$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(f,g)$-medible y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(g,h)$-medible entonces $\gamma \circ \sigma$ es (f,h)-medible.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(\tau_h)$. Entonces se cumple lo siguiente $(\gamma \circ \sigma)^{-1}(B) = \sigma^{-1}(\gamma^{-1}(B)) \in \mathcal{B}(\tau_f)$ ya que $\gamma^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\tau_g)$ y así concluimos que $\sigma^{-1}(\gamma^{-1}(B)) \in \mathcal{B}(\tau_f)$. ■

En los siguientes ejemplos damos la clara afirmación de que las funciones (f,g)-medibles no siempre tienen las mismas propiedades que las funciones medibles.

Ejemplo 5.11 Existen $f \in Sel_2(\mathbb{R})$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (f,f)-medible y $a \in \mathbb{R}$ tales que $a\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es (f,f)-medible, como lo veremos a continuación:

Sean $A = \pi\mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus A$, $f_d \in Sel_2(A)$ tal que τ_{f_d} es la topología discreta en A y $f_E \in Sel_2(B)$ tal que τ_{f_E} es la topología Euclideana en B.

Ahora definamos a $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si } x \in B \text{ y } y \in A, \\ x & \text{si } x < y \text{ y } x, y \in B \\ f_d(\{x,y\}) & \text{si } x, y \in A. \end{cases}$$

Observemos que la identidad $\sigma := 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es (f,f)-medible. Consideremos la función $\pi\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\pi\sigma(r) = \pi r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ (donde π es el número pi).

Afirmamos que $\pi\sigma$ no es (f,f)-medible.

En efecto, sabemos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{B}(\tau_f) = \mathcal{B}(\tau_{f_d}) \bigoplus \mathcal{B}(\tau_E)$. Por otro lado, tenemos que $(\pi\sigma)^{-1}(A) = \mathbb{Q}$, por lo cual $\sigma^{-1}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ el cual no esta contenido en $\mathcal{B}(\tau_f)$ ya que $(\pi\sigma)^{-1}(A) \subseteq B$ y τ_{f_E} es la topología Euclideana en B.

Para ver que la suma de funciones (f,g)-medibles no siempre será (f,g)-medible, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.12 Sean $A = 2\mathbb{P}$, y $B = \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{P}$ donde $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Definamos $f \in Sel_2(\mathbb{R})$ como

$$f(\{x,y\}) := \begin{cases} x & \text{si } x \in B \text{ y } y \in A, \\ x & \text{si } x, y \in B \text{ y } x < y, \\ f_d(\{x,y\}) & \text{si } x, y \in A. \end{cases}$$

Tenemos que la identidad $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es (f,f)-medible. Consideremos la función $\sigma = 1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}}$. Ahora, observemos que $\sigma^{-1}(A) = \mathbb{P}$ y $\sigma^{-1}(A) \cap B$ es infinito, y además $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{B}(\tau_f) = \mathcal{B}(\tau_{f_E}) \bigoplus \mathcal{P}(A)$ sin embargo $\sigma^{-1}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(\mathbb{P}) \nsubseteq \mathcal{B}(\tau_f)$, por lo tanto σ no es (f,f)-medible.

Observación 5.13 En los Ejemplos 5.11 y 5.12 observemos que si tenemos que $x <_f y$ no siempre se cumplirá que $\alpha x <_f \alpha y$ para algún $\alpha \geq 0$ y $x + z <_f y + z$ con $z \in \mathbb{R}$.

5.2. Comentarios

En referencia a los Ejemplos 5.11 y 5.12 observamos que si reemplazamos en la noción clásica de funciones medibles la σ-álgebra de Borel $(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ por la σ-álgebra de Borel mediante selecciones de dos puntos $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$, no se cumplirá la aditividad de funciones medibles y la multiplicación por escalares, ya que puede fallar que estas operaciones se conserve la propiedad de medibles, es decir recordemos que si tenemos una función $\sigma : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_f(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ medible entonces $a\sigma$ siempre es medible con $a \in \mathbb{R}$ y de manera similar si tenemos dos funciones medibles $\gamma, \sigma : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_f(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ entonces $\gamma + \sigma$ siempre es medible, sin embargo esto no puede ocurrir si pasa lo que comentamos.

Conclusión

Una de la metas principales de los resultados que se presentan en está tesis, es la de complementar los cursos de Teoria de la Medida que se enseñan en las carreras de Matemáticas. En efecto, con dichos resultados el alumno puede entender mejor la noción de σ-álgebra y de una medida en dicha σ-álgebra, puesto que en este trabajo se exhiben muchas medidas exteriores y σ-álgebras que conforman diversos ejemplos interesantes y caóticos.

La construcción de nuevas σ-álgebras de Borel, tiene como propósito que el alumno se de cuenta de la diversidad existente de estas y a la vez aprenda el uso de las selecciones de dos puntos para su construcción. Teniendo como resultado que la medida exterior inducida por una selección de dos puntos generaliza a la medida exterior de Lebesgue y la σ-álgebra de Borel de topologias inducidas por una selección generalizan a la σ-álgebra de Borel de los números reales.

Se dio un ejemplo de una selección de dos puntos f de tal forma que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ pertenece a la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_f(\mathbb{R})$. Otros ejemplos más exóticos que este último se construyen en está tesis. Lo cual demuestra la versatilidad del tema para la comprensión de lo que es una σ-álgebra de Borel. Además probamos que se pueden construir $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ σ-álgebras de Borel distintas de entre sí.

Para un futuro proyecto de investigación se determinó que el capítulo dedicado a la $\mathcal{I}$-densidad, nos marca una línea de investigación muy importante mediante las selecciones de dos puntos, más precisamente el estudio de la $\mathcal{N}_{\lambda_f}$-densidad de subconjuntos de $\mathbb{R}$ donde f es una selección de dos puntos y las topologías de $\mathcal{N}_f$-densidad que estas densidades conllevan.

Además en este trabajo se generaliza la noción de función medible utilizando las σ-álgebra de Borel definida mediante selecciones de dos puntos, con ello mostramos la excentricidad de diversas propiedades medibles que algunos ejemplos pueden tener.

Concluimos que está tesis se pueda usar como un texto complementario a un curso básico de Teoría de la Medida.

Bibliografía

[1] Astorga-Moreno, J. A. y Garcia-Ferreira S. (2014). *Outer measures on the real line by weak selections.* Real Anal. Exchange 39, 101-116.

[2] Ciesielski K. (1997). *Set Theory for the Working Mathematician.* Student Texts vo. 39, London Mathematical Siciety.

[3] Ciesielski K., Larson L., Ostaszewski K. (1991). *$\mathcal{I}$-Density Continuous Functions.* Mathematics Subject Classification. Primary 26A21, Secondary 28A05.

[4] Claude-Alain Faure (2002). *A Short Proof of Lebesgue's Density Theorem.* The Mathematical Association of America. 194-196.

[5] Cohn D. L. (1980). *Measure Theory.* Boston, Birkhauser.

[6] Comfort W. W. y Negrepontis S. (1974). *The Theory of Ultrafilters.* Springer-Verlag.

[7] Costantini, C. (2006). *Weak orderability of some spaces which admit a weak selection.* Comment. Math. Univ. Carolin. 47, 609-615.

[8] Engelking R. (1989). *Sigma Series in Pure Mathematics* General Topology. vol. 6, Heldermann Verlag.

[9] Garcia-Ferreira S. *On Borel sets of topologies generated by two-point selections*, to apear.

[10] Garcia-Ferreira S., Miyazaki K. y Nogura T. (2013). *Continuous weak selections for products* Top. Appl. 160, 2465-2472.

[11] Garcia-Ferreira S., Miyazaki K., Nogura T. y Tomita A. H. (2013). *Generated by weak selection topologies.* Houston J. Math. 39, 1385-1399.

[12] Garcia-Ferreira S., Miyazaki K., Nogura T. y Tomita A. H. *Topologies generated by weak selection topologies.* Houston J. Math., to apear.

[13] Garcia-Ferreira S. y Tomita H. A. (2008). *A non-normal topology generated by a two-point selection.* Top. Appl. 155

[14] Garcia-Ferreira S., Tomita A. H. y Ortiz-Castillo, Y. F. (2018). *σ-Ideales y medidas exteriores en la linea real.* 1-14.

[15] Gutev V. (2014). *Selections and hyperspaces.* Recent Progress in General Topology III, Editors: K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon, Atlantis Press, 535-580.

[16] Gutev V. y Nogura T. (2004). *A topology generated by selections.* Top. Appl. 153, 900-911.

[17] Gutev V. y Nogura T. (2001). *Selections and order-like selections.* Appl. Gen. Top. 2, 205-218.

[18] Hrusak, M. y Martinez-Ruiz I. (2009). *Selections and weak orderability.* Fund. Math. 203, 1-20.

[19] Hrusak M. y Martinez-Ruiz I. (2010). *Spaces determined by selections.* Top. Appl. 157

[20] Michel E. (1951). *Topologies on spaces of subsets.* Tran. Amer. Math. Soc. 71, 152-182.

[21] Nagao M. y Shakhmatov D. (2012). *On the existence of kings in continuous tournaments.* Top. Appl. 159, 3089-396.